# Modellbilden im Mathematikunterricht am Beispiel der Modellierung von Infektionskrankheiten

---

**Masterarbeit**

*zur Erlangung des akademischen Grades*

*Master of Education*

*an der Naturwissenschaftlichen Fakultät der*

*Paris-Lodron-Universität Salzburg*

***Eingereicht von***

***Stefan Sturm***

***Matrikelnummer: 01520024***

*Gutachter: Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Karl Josef Fuchs*

*School of Education und Fachbereich Mathematik*

*Salzburg, Sommersemester 2021*

## Abstract

Die vorliegende Masterarbeit bietet eine Darstellung sowie eine exemplarische Umsetzung der Theorie zum Modellbilden im Mathematikunterricht. Die Modellierungskonzepte von Werner Blum, von Hans-Georg Weigand und Hubert Weller, von Frank Förster sowie von Joachim Engel wurden dargestellt und verglichen. In diesen Konzepten wird das Mathematische Modellieren als zweifacher und zyklischer Übersetzungsprozess zwischen dem Bereich der Mathematik und dem Rest der Welt verstanden. Dieser Modellbildungsprozess wird exemplarisch in eine Modellierung zur Ausbreitung von Infektionskrankheiten übernommen. Außerdem wird gezeigt, worin die Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Modelle liegen, wie digitale Werkzeuge den Modellbildungsprozess vielseitig unterstützen können und welche Rolle das Modellbilden im kompetenzorientierten Mathematikunterricht einnimmt.



Schlüsselwörter: Modellbilden, Mathematik, Unterricht, Modellbildungskreislauf, Infektionskrankheiten



This master's thesis offers a presentation as well as an exemplary implementation of the theory of modelling in mathematics education. The modeling concepts of Werner Blum, Hans-Georg Weigand and Hubert Weller, Frank Förster and Joachim Engel were presented and compared. In these concepts mathematical modelling is understood as a twofold and cyclical translation process between the field of mathematics and the rest of the world. This modelling process is exemplarily adopted in a modelling of the spread of infectious diseases. In addition, it is demonstrated what the possibilities and limits of mathematical modelling are, how digital tools can support the modelling process in a variety of ways and which role modelling plays in competence-oriented mathematics education.



Keywords: Modelling, Mathematics, Education, modelling-cycle, infectious-diseases

# Vorwort und Dank

Als das soziale Leben zu Beginn der Covid-19-Pandemie deutlich eingeschränkt wurde, stellte ich mir, wie wohl viele andere auch, die Frage, welches Ausmaß die Pandemie in Österreich erreichen wird, und wann es endlich möglich sein wird, die strengen Maßnahmen zu lockern. Ich verfolgte die Infektionszahlen von Tag zu Tag mit Spannung und versuchte schließlich diese mit einem mathematischen Modell zu beschreiben. Nach einigen selbstständigen Modellierungsversuchen bin ich in meinen Recherchen schließlich auf das Susceptible-Infectious-Recovered-Modell (kurz SIR-Modell) gestoßen und habe versucht es auf die Situation in Österreich anzuwenden. Dabei habe ich gemerkt, wie spannend und interessant mathematisches Modellieren sein kann. So entstand die Idee, mich im Rahmen meiner Masterarbeit mit dem Modellbilden im Mathematikunterricht am Beispiel der Modellierung von Infektionskrankheiten zu befassen.

Mein besonderer Dank gilt meiner Ehefrau Marta Sturm für die motivationale und mentale Unterstützung beim Schreiben dieser Arbeit.

Ebenso gebührt mein Dank meinen Eltern, für die emotionale als auch finanzielle Unterstützung während des gesamten Studiums.

Außerdem gilt mein Dank auch Herrn Ao. Univ. Prof. Mag. Dr. Karl-Josef Fuchs für die professionelle Betreuung. Sein wertschätzender Umgang und sein konstruktives Feedback halfen mir beim Verfassen dieser Masterarbeit.

# Inhalt


Abbildungsverzeichnis ..... 6

Einleitung ..... 7

1. Modellbilden im Mathematikunterricht ..... 9

1.1 Konzepte mathematischer Modellbildung ..... 9

1.1.1 Modellbilden nach Blum ..... 9

1.1.2 Modellbilden nach Weigand und Weller ..... 12

1.1.3 Modellbilden nach Förster ..... 14

1.1.4 Stochastisches Modellbilden nach Engel ..... 16

1.1.5 Vergleich der verschiedenen Modelle ..... 18

1.2 Differenzierung von deskriptiven und normativen Modellen ..... 21

1.3 Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Modellbildung ..... 22

1.4 Die Rolle von digitalen Werkzeugen im Modellbildungskreislauf ..... 25

1.5 Modellbilden im kompetenzorientierten Mathematikunterricht ..... 30

1.5.1 Argumente für das Modellbilden im Mathematikunterricht ..... 30

1.5.2 Umsetzung im Unterricht ..... 32

1.5.3 Herausforderungen ..... 33

1.5.4 Modellieren als Handlungsdimension in den österreichischen Bildungsstandards ..... 35

2. Praktischer Teil – Modellierung der Ausbreitung von Infektionskrankheiten ..... 36

2.1 Einfache Modelle – exponentielles und logistisches Wachstum ..... 37

2.1.1 Exponentielles Wachstum ..... 37

2.1.2 Exponentielle Veränderung der inzidenten Fälle in Abhängigkeit von der effektiven Reproduktionszahl ..... 43

2.1.3 Logistisches – Wachstum ..... 47

2.2 Das SIR – Modell ..... 53

2.2.1 SIR – Modell mit retardierten Differenzialgleichungen ..... 55

2.2.2 Das SIR – Modell von Kermack und McKendrick ..... 62

2.3 Vergleich und Gegenüberstellung der Modelle ..... 73

3. Fazit ..... 75

Literaturverzeichnis ..... 79
Anhang ..... 83
Lemma 1 ..... 83
Lemma 2 ..... 84
Implementierung des verzögerten SIR-Modells (6) in Mathematica ..... 86
Eidesstattliche Erklärung ..... 87

# Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1.1.1.1 Modellierungskreislauf von Leiß und Blum ..... 9
Tabelle 1.1.5.1 Theoretische Konzepte zum Modellbilden nach Autoren und Schritten ..... 20
Abbildung 1.4.1 Der erweiterte Modellbildungskreislauf ..... 26
Abbildung 1.4.2 Nutzung digitaler Werkzeuge beim Modellieren ..... 28
Abbildung 2.1.1.1 Exponentielles Wachstum, Parameterbestimmung expermimentell ..... 39
Abbildung 2.1.1.2 Exponentielles Wachstum, Parameterbestimmung per Regression ..... 40
Abbildung 2.1.1.3: Modellfunktion I auf Logarithmischer Skala ..... 41
Abbildung 2.1.1.4 Pasenweise exponentieller Trend ..... 42
Abbildung 2.1.2.1 Effektive Reproduktionszahl und inzidente Fälle ..... 44
Abbildung 2.1.2.2 Prognose der Neuinfektionen mittels Reproduktionszahl ..... 45
Abbildung 2.1.3.1 Durchschnittliche Dauer der Infektiosität ..... 47
Abbildung 2.1.3.2 Logistisches Modell ohne Maßnahmen ..... 47
Abbildung 2.1.3.3 Logistisches Modell mit sehr stark verringerter Ansteckungsrate ..... 50
Abbildung 2.1.3.4 Patienten in Intensivpflege bei verringerter Ansteckungsrate ..... 52
Abbildung 2.2.1 Gruppen in SIR-Modellen ..... 53
Tabelle 2.2.1 Definition der Gruppen im SIR-Modell ..... 54
Abbildung 2.2.1.1 Durchschnittliche Dauer der Infektiosität ..... 55
Abbildung 2.2.1.2 Unrealistische Resultate in Modell (4) ..... 57
Abbildung 2.2.1.3 Widersprüchliche Ergebnisse in Modell (5) ..... 58
Abbildung 2.2.1.4 SIR-Modell (6) mit retardierten Differenzengleichungen ..... 59
Abbildung 2.2.1.5 Problematische Resultate des SIR-Modells (6) ..... 60
Abbildung 2.2.2.1 SI-Phasenraumporträt des klassischen SIR-Modells ..... 63
Abbildung 2.2.2.2 Effektive Reproduktionszahl im SIR-Modell ..... 64
Abbildung 2.2.2.3 SIR-Modell (4) bis (9) ..... 65
Abbildung 2.2.2.4 Zwei Szenarien des SIR-Modells (4) bis (9) ..... 66
Abbildung 2.2.2.5 Exponentieller Trend der Ansteckungsrate ..... 67
Abbildung 2.2.2.6 SIR-Modell (4) bis (9) mit variabler Ansteckungsrate ..... 68
Abbildung 2.2.2.7 SIR-Modell (4) bis (9) mit veränderter Populationsgröße ..... 68
Abbildung 2.2.2.8 SIR-Modell (4) bis (9) mit kalibrierten Parametern ..... 69

# Einleitung

Seit dem Ausbruch der Covid-19-Pandemie Ende 2019 sind Modellrechnungen zum Verlauf der Pandemie nicht nur in der Wissenschaft, sondern auch in den Medien sehr präsent (Sill, 2020). Konzepte und Modelle aus der Epidemiologie, wie Herdenimmunität, Reproduktionszahl oder exponentielles Wachstum werden von einer breiten Öffentlichkeit diskutiert. In der aktuellen Krisensituation wird so die Relevanz der Mathematik bzw. mathematischer Modelle für das tägliche Leben offenbar.

Mathematisches Modellbilden ist von großer Bedeutung für Wissenschaft, Politik und Technik. Der Mathematikunterricht der Sekundarstufe in Österreich soll den Lehrplänen entsprechend den Erwerb der benötigten Modellbildungskompetenzen fördern (Rechtsinformationssystem des Bundes (RIS), 2021a). Die aktuelle Covid-19-Pandemie kann im Mathematikunterricht eine Ausgangssituation für verschiedene Modellierungen darstellen.

Die vorliegende Masterarbeit hat die Klärung folgender Forschungsfragen zum Ziel:

1. Was bedeutet Modellbilden im Mathematikunterricht?
2. Wie kann eine Modellierung zur Ausbreitung von Infektionskrankheiten auf schulmathematischem-Niveau aussehen?

Während sich das erste Kapitel mit der theoretischen Grundlage des Modellbildens aus fachdidaktischer Sicht befasst, soll im zweiten Kapitel die Ausbreitung einer Infektionskrankheit exemplarisch modelliert werden, um die theoretischen Ausführungen aus dem ersten Kapitel zu veranschaulichen. Dabei dient die aktuelle Covid-19-Pandemie in Österreich als konkrete Ausgangssituation für die Modellbildung.

Um im ersten Kapitel die Frage nach der theoretischen Grundlage des mathematischen Modellbildens im Mathematikunterricht zu klären, werden zunächst vier prototypische Konzepte zum Modellieren beschrieben und verglichen (1.1). Anschließend wird zwischen deskriptiven und normativen Modellen unterschieden (1.2) und die Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Modelle aufgezeigt (1.3). Darauf wird dargestellt, wie das Modellbilden auf verschiedenste Art und Weise durch digitale Werkzeuge unterstützt wird (1.4) und welche Rolle das Modellbilden im kompetenzorientierten Unterricht spielt (1.5).

Die Veranschaulichung der theoretischen Grundlagen zum mathematischen Modellbilden im zweiten Kapitel erfolgt durch das mehrmalige Durchlaufen des Modellbildungskreislaufs. Die Modellbildung geht von den einfachen Modellen des exponentiellen und des logistischen Wachstums aus (2.1). Diese werden im nächsten Abschnitt zu einem einfachen Susceptible-Infectious-Recovered-Modell (SIR-Modell) erweitert (2.2). In (2.3) werden schließlich die erstellten Modelle verglichen. Dabei wird immer wieder auf die Theorie zum Modellbilden aus dem ersten Teil zurückgegriffen.

# 1. Modellbilden im Mathematikunterricht

## 1.1Konzepte mathematischer Modellbildung

Mathematische Modelle beschreiben eine Situation der realen Welt in der Sprache der Mathematik. Dazu ist ein Abstraktions- und Übersetzungsschritt notwendig. Mit diesen Modellen sollen schließlich durch Interpretation der mathematischen Ergebnisse Fragenstellungen zur Ausgangssituation beantwortet werden können. Im Folgenden werden nun einige prototypische theoretische Konzepte mathematischer Modellbildung von verschiedenen Autoren dargestellt und miteinander verglichen.

### 1.1.1 Modellbilden nach Blum

Werner Blum (1985, S. 200f.) unterscheidet in seinem Modellbildungskreislauf zwischen der Mathematik und der Realität, bzw. dem Rest der Welt. Dabei wird eine problemhaltige Situation so aufgearbeitet, dass sie mit mathematischen Methoden bearbeitet bzw. gelöst werden können. Die mathematischen Resultate werden schließlich in den Bereich der Realität überführt (Blum, 1985, S. 201). Dieser Kreislauf wird in der Regel mehrmals durchlaufen, bis eine zufriedenstellende Lösung für das reale Problem gefunden ist (Blum, 1985, S. 205). Blum und Dominik Leiß (2005) unterteilen diesen Kreislauf in sieben Schritte:

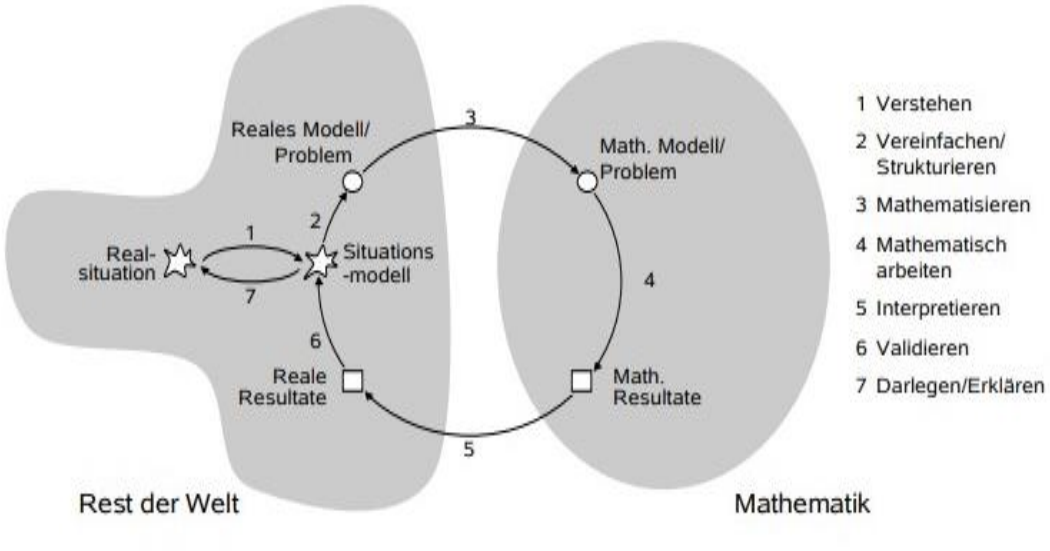



*Abbildung 1.1.1.1* Modellierungskreislauf von Leiß und Blum (2005)

**1. Schritt: Konstruieren/Verstehen**

Zunächst geht es darum, die *Realsituation* aus dem Alltag oder einer anderen wissenschaftlichen Disziplin zu verstehen. Relevante Informationen werden von irrelevanten Informationen unterschieden. Außerdem stellt sich die Frage, ob wesentliche Informationen fehlen, die im weiteren Prozess abgeschätzt werden müssen. Schließlich ist ein erkenntnisleitendes Problem zu formulieren. Es werden zusätzliche Fragen bzw. Anforderungen an eine etwaige Lösung gestellt. Aus diesen Fragen bzw. Anforderungen werden schließlich den eigenen Interessen entsprechend einige ausgewählt (vgl. Blum, 1985, S. 210). Das heißt: Das so entstandene *Situationsmodell* bildet die reale Welt nicht eins zu eins ab, sondern ist subjektiv eingefärbt.

**2. Schritt: Vereinfachen/ Strukturieren**

In weiterer Folge gelangt man vom Situationsmodel durch Vereinfachen und Strukturieren zu einem *Realen Modell bzw. Problem*. Manche Aspekte bzw. Sonderfälle der Problemstellung müssen außer Acht gelassen werden, wenn angenommen werden kann, dass sie einen geringen Einfluss auf die zu modellierende Situation haben (vgl. Blum, 1985, S. 201). Das Reale Modell ist

> … zum einen noch so differenziert, daß [sic!] es wesentliche Züge der Situation adäquat wiedergibt, zum anderen aber schon so weitgehend vereinfacht, strukturiert und schematisiert, daß [sic!] es eine Erschließung mit … mathematischen Mitteln zulässt … (Blum, 1985, S. 202).

**3. Schritt: Mathematisieren**

Im dritten Schritt werden schließlich die Daten, Begriffe, Beziehungen, Gesetze, Forderungen oder Annahmen in die Sprache der Mathematik übersetzt (Blum, 1985, S. 202). Dies können geometrische Darstellungen, Formeln, Funktionen oder Gleichungssysteme sein (Blum, 1985, S. 202). Außerdem werden die umgangssprachlich formulierten Begriffe des *Realmodells* mathematisch gefasst. So erhält man ein *mathematisches Modell.* Blum weist explizit darauf hin, dass es mehrere verschiedene *mathematische Modelle* zur selben Situation bzw. Fragestellung geben kann, da die zuvor getroffenen Annahmen und Vereinfachungen das *mathematische Modell* beeinflussen können (vgl. Blum, 1985, S. 203). Dies wird im zweiten Kapitel veranschaulicht. Hier werden mehrere Modelle zur Ausbreitung einer Infektionskrankheit erstellt, die auf unterschiedlichen Annahmen und Vereinfachungen basieren.

**4. Schritt: Mathematisch Arbeiten**

Mit mathematischen Methoden wird daraufhin das *mathematische Modell* bearbeitet. Mathematische Werkzeuge sind Schlussfolgerungen, Fallunterscheidungen oder Durchrechnen von konkreten Beispielen bzw. das Simulieren von verschiedenen Szenarien (vgl. Blum, 1985, S. 204). Beim Operieren sind Computer Algebra Systeme (CAS) (vgl. Fuchs & Plangg, 2018) häufig wichtige Hilfsmittel. Sie ermöglichen es, den Fokus auf die anderen Schritte im Modellbildungskreislauf zu lenken (vgl. Blum, 1985, S. 204 und Siller, 2006, S. 17). Im vierten Schritt kann sich herausstellen, dass das *mathematische Modell* nicht lösbar bzw. sogar in sich widersprüchlich ist (Blum, 1985, S. 204).

**5. Schritt: Interpretieren**

Die gewonnenen *mathematischen Resultate* werden im fünften Schritt „in die Realität zurückübersetzt – d.h. in der Ausgangssituation *interpretiert* bzw. auf diese *angewandt* (Blum, 1985, S. 204). Aus reinen Zahlen oder Kurvenverläufen werden so *reale Resultate*, die eine Antwort auf die Ausgangssituation ermöglichen (vgl. Blum & Leiß, 2005, S. 19).

**6. Schritt: Validieren**

Bevor der Modellierungsprozess durch das Darstellen bzw. Erklären der eigenen Lösung abgeschlossen wird, sind die Ergebnisse noch zu validieren. Es wird die Frage gestellt, ob die Ergebnisse mit der ursprünglichen Fragestellung ausreichend beantworten können, oder ob sie den in der Ausgangssituation beobachteten Phänomenen widersprechen (vgl. Blum, 1985, S. 205). Derartige Widersprüche könnten bei der Vereinfachung der Ausgangssituation entstanden sein, oder auch erst dann, *„wenn zusätzliche, aufgrund der Modell-Ergebnisse naheliegende empirische Daten erhoben werden“* (Blum, 1985, S. 205).[1] Stellen sich die Resultate als unbrauchbar oder zumindest als nicht zur Gänze zufriedenstellend heraus, so ist das Modell zu modifizieren oder durch ein komplett neues zu ersetzen (Blum, 1985, S. 205).

[1] Dies kann zum Beispiel sein, wenn eine wachsende Population anhand einer Exponentialfunktion modelliert wird. Dieses Modell kann – wie wir auch im zweiten Kapitel dieser Arbeit sehen werden – zunächst gut brauchbare Ergebnisse liefern. Längerfristig stellt sich aber heraus, dass das exponentielle Wachstum irgendwann eingebremst wird (vgl. Blum, 1985, S. 205).

**7. Schritt: Darstellen**

Wenn schließlich die gewonnenen Ergebnisse die Fragestellungen, die sich aus der *Realsituation* ergaben, in zufriedenstellender Weise beantworten, können sie präsentiert werden (Fuchs & Blum, 2008, S. 139).

### 1.1.2 Modellbilden nach Weigand und Weller

Für Hans-Georg Weigand und Hubert Weller (1997, S. 163) ist Modellbilden der Mathematisierungsprozess einer Umweltsituation in mehreren Schritten bzw. Stufen. Diese Schritte haben nicht in allen Aufgaben die gleiche Bedeutung. Der Rechner spielt beim Modellieren nach Weigand und Weller (1997, S. 162) eine wesentliche Rolle, da er es ermöglicht im Unterricht komplexere Modelle zu behandeln. Das Analysieren und Mathematisieren von Problemen sowie das Interpretieren und Validieren der mit dem Computer gewonnenen Lösungen gewinnt somit an Bedeutung (Weigand & Weller, 1997, S. 162).

**1. Schritt: Analysieren**

> Die Problemstellung wird hinsichtlich funktionaler Zusammenhänge und Abhängigkeiten qualitativ analysiert und beschrieben und es werden die hinsichtlich der Zielvorstellung wichtigen Ausgangsgrößen oder -parameter herausgestellt (Weigand & Weller, 1997, S. 163).

Hierbei geht es darum sich mit der Ausgangssituation vertraut zu machen. Bei Weigand und Weller (vgl. 1997, S. 163 und S. 165) ist das zum Beispiel die Besichtigung einer Nähmaschine oder eines Automotors, um sich über die jeweiligen mechanischen Vorgänge zu informieren.

**2. Schritt: Simulieren**

> Die Situation wird mit Hilfe von zeichnerischen Darstellungen, Tabellen oder realen Modellen dargestellt, nachgebildet oder simuliert (Weigand & Weller, 1997, S. 163).

Das Nachbilden bzw. Simulieren in einem Modell liefert weitere Einblicke in die zu mathematisierende Umweltsituation (vgl. Weigand & Weller, S. 164). Weigand und Weller (1997, S. 163ff.) erwähnen, dass Zeichnungen mithilfe von Geometrieprogrammen am Computer erstellt werden können. Hierbei findet eine Vereinfachung statt, da in die Darstellungen und Modelle nur die als wichtig erachteten Elemente eingehen.

**3. Schritt: Mathematisieren**

> Abhängigkeiten und funktionale Zusammenhänge werden quantitativ durch Formeln erfasst und dadurch für die Analyse mithilfe des Rechners aufbereitet (Weigand & Weller, 1997, S. 163).

Aus den Simulationen bzw. Darstellungen aus Schritt zwei werden im dritten Schritt die Abhängigkeiten und funktionalen Zusammenhänge herausgelesen und formuliert (vgl. Weigand & Weller, 1997, S. 164 und 166). Der herkömmliche Mathematikunterricht beschränkt sich meist ausschließlich auf diese Phase. Daher erscheint Mathematik den Lernenden häufig nicht als geeignetes Mittel zum Lösen realer Probleme (vgl. Siller, 2006, S. 22).

**4. Schritt: Experimentieren**

> Das Verändern der Ausgangsparameter erlaubt das gezielte Experimentieren mit vorgegebenen Größen und damit das Erkunden der Situation bei abgeänderten Ausgansgrößen (Weigand & Weller, 1997, S. 163).

Durch dieses Probieren soll schließlich zu einer akzeptablen Lösung der Problemstellung gefunden werden (vgl. Weigand & Weller, 1997, S. 165). Beim Experimentieren dienen CAS als Unterstützung, da sich schnell viele verschiedene Szenarien numerisch und symbolisch durchrechnen lassen bzw. Parameter durch Schieberegler fließend manipuliert werden können. Weigand und Weller weisen außerdem darauf hin, dass in der Praxis des Maschinenbaus häufig erst am mathematischen Modell experimentiert wird, bevor Prototypen gebaut werden (vgl. Weigand & Weller 1997, S. 165).

**5. Schritt: Interpretieren**

> Die vom Rechner gelieferten Ergebnisse werden interpretiert und im Hinblick auf die reale Situation diskutiert (Weigand & Weller, 1997, S. 163).

Die durch das Experimentieren erhaltenen Resultate liefern neue Einblicke auf die Ausgangssituation. Diese Phase dient auch zur Kontrolle, der vorherigen Schritte. Kann keine Übereinstimmung mit der Realität gefunden werden, muss das Modell abgeändert werden (vgl. Siller, 2006, S. 23).

**6. Schritt: Erklären/Dokumentieren**

> Die Reale Situation wird aufgrund der vom Rechner gelieferten Ergebnisse auf eine neue Weise verstanden (Weigand & Weller, 1997, S. 163).

Korrespondieren die Ergebnisse mit der Ausgangssituation, so führt das Zusammenspiel des realen Modells mit den mathematischen Resultaten zu einem tieferen Verständnis der realen Situation (vgl. Weigand & Weller, 1997, S. 166f.). Schließlich wird sorgfältig dokumentiert, wie es zu den neuen Erkenntnissen gekommen ist (Siller, 2006, S. 24).

### 1.1.3 Modellbilden nach Förster

Frank Förster (2000) geht wie Blum ebenso von einem Modellbildungskreislauf aus. Dieser wird in vier Schritten durchlaufen, während der fünfte Schritt in der Veränderung des Modells mit anschließendem erneutem Durchlaufen des Kreislaufs besteht. Ausgegangen wird von einem Problem, das Strukturen aufweist, *„die eine mathematische Formulierung und Behandlung nahelegen oder zumindest möglich erscheinen lassen“* (Förster, 2000, S. 121).

**Schritt 1: Schaffung eines Realmodells**

Zunächst sollte man sich mit der Problemsituation möglichst vertraut machen. Es sollten alle Gegebenheiten und Einflüsse im Kontext des Problems erfasst und strukturiert werden (vgl. Förster, 2000, S. 121). Meist ist der Problemkontext allerdings derart komplex, dass Vereinfachungen bzw. Idealisierungen vorzunehmen sind (vgl. Förster, 2000, S. 121). Die Idealisierungen und Vereinfachungen sind wesentlich geprägt von den – auch subjektiven – Zielen der Problemlöserin bzw. des Problemlösers. Derartige Vereinfachungen sind etwa die Vernachlässigung des Luftwiderstandes, oder die Beschreibung der Erde als Kugel (Siller, 2006, S. 18).

**Schritt 2: Mathematisierung des Realmodells**

Das Realmodell wird in mathematische Formeln und Ausdrücke übersetzt. Das entstandene mathematische Modell ist aber keine exakte Übertragung der Realität in die Mathematik. Die Übereinstimmung des mathematischen Modells mit der realen Situation hängt im Wesentlichen von der Qualität des im ersten Schritt entstandenen Realmodells ab (vgl. Förster, 2000, S. 122). Im zweiten Kapitel wird anhand verschiedener Modelle zur Ausbreitung des Coronavirus (Sars-Cov-2) deutlich, dass es mitunter mehrere mathematische Modelle zu einer Realsituation geben kann.

**Schritt 3: Erarbeitung einer mathematischen Lösung**

Im dritten Schritt wird versucht das mathematische Modell zu lösen. Kann auch nach weiteren Nachforschungen keine Lösung des mathematischen Modells gefunden werden, muss das Realmodell modifiziert werden, etwa durch Vereinfachung (vgl. Förster, 2000, S. 122).

**Schritt 4: Interpretation der mathematischen Lösung und Validierung des Modells**

Die mathematischen Resultate werden im Blick auf die Ausgangssituation *interpretiert*. *Validierung* meint, dass *„man überprüft, ob die mathematische Lösung nach Rückinterpretation auch tatsächlich eine Lösung des ursprünglichen außermathematischen Problems ist“* (Förster, 2000, S. 123). Es stellt sich die Frage, ob die Ergebnisse des Modells aufgrund der Vereinfachungen und Idealisierungen noch ausreichend mit der Realität übereinstimmen (vgl. Förster, 2000, S. 123). Kann man die Gültigkeit eines Modells nicht direkt mit der Realität abgleichen, so können mehrere Szenarien simuliert werden (vgl. Förster, 2000, S. 123). Stellt sich ein Modell valide heraus, so können mithilfe der Simulationen Prognosen erstellt werden (vgl. Förster, 2000, S. 123).

**Schritt 5: Veränderung des Modells**

Treten bei den Interpretationen oder Validierungen Widersprüche zur Realität auf, so ist das Modell in Frage zu stellen. Der Kreislauf ist erneut zu durchlaufen (vgl. Förster, 2000, S. 123f.). *„Ob ein erneuter Durchlauf des Modellbildungsprozesses notwendig ist, hängt aber auch wesentlich von den Zielvorstellungen ab, die der Anwender mit dem Modell verbindet“* (vgl. Förster, 2000, S. 124).

### 1.1.4 Stochastisches Modellbilden nach Engel

Möchte man ein mathematisches Modell einer Situation erstellen, so müssen immer Beobachtungen der realen Welt angestellt werden. Durch Experimente und Messungen, können diese Beobachtungen quantifiziert werden. Beim Experimentieren werden verschiedene Einflussgrößen variiert und deren Einfluss auf eine Ausgangsgröße gemessen (z.B.: Welchen Einfluss hat die Geschwindigkeit eines Autos auf den Bremsweg?). Bei vielen Experimenten in den Humanwissenschaften können jedoch die verschiedenen Einflussgrößen nur in sehr beschränktem Ausmaß gesteuert werden. Daher sind die erhobenen Daten häufig von verschiedensten Störfaktoren beeinflusst. In solchen Kontexten werden häufig stochastische Methoden zur Modellbildung herangezogen.

Joachim Engel (1998) gibt einen Modellbildungskreislauf für die stochastischen Modellierung funktionaler Abhängigkeiten an. Dabei wird die Responz $y$ vom Prädiktor $x$ als von $x$ abhängige Zufallsvariable beschrieben. Man spricht von einem festen Design, wenn die $x$-Werte fest gewählt werden und von einem zufälligen Design, falls auch der Prädiktor $X$ eine Zufallsvariable darstellt. Zwecks besserer Lesbarkeit kann $x$ in diesem Abschnitt auch als Zufallsvariable interpretiert werden.

**Schritt 1: Datenerhebung (Gewinnung geeigneter Daten)**

Zunächst wird versucht die für relevant erachteten Daten aus der realen Situation zu erheben. Dabei ist darauf zu achten, dass die erhobenen Daten sich für die Beantwortung der Problemstellung eignen. Es stellt sich die Frage nach einer geeigneten Zufallsstichprobe und möglichen Verzerrungen, die beispielsweise durch Fragestellungen oder Messungen entstehen können (vgl. Engel, 1998, S. 99).

**Schritt 2: Mathematisierung (vorläufiges Modell)**

Der Zusammenhang der abhängigen Größe $y$ vom Prädiktor $x$ wird mithilfe einer deterministischen Funktion $m$ plus einem von $x$ unabhängigem und zufälligem Residuum $\varepsilon_i$ (Engel, 1998, S. 98) beschrieben:

$$Y = m(x) + \varepsilon_i \quad i = 1, \dots, n$$

Das Modell hat also eine Komponente, die vom Zufall bzw. Störfaktoren beeinflusst wird und eine weitere Komponente, die streng deterministisch von der Eingangsgröße abhängt.

Weiterhin geht es darum für $m$ eine Funktion mit freien Parametern zu finden, die möglichst gut zu den Daten passt.

**Schritt 3: Kalibrierung (Schätzung einzelner Parameter)**

Im dritten Schritt geht es darum, die freien Parameter der Modellfunktion so zu schätzen, dass die Funktion möglichst gut an die Daten angepasst wird. Dies kann im einfachsten Fall auch durch rein experimentelles Arbeiten erfolgen (vgl. Weigand & Weller, 1997, S. 167). Häufig wird zur optimalen Anpassung auch die Methode der Kleinsten-Quadrate verwendet (vgl. Engel, 1998, S. 103) oder mittels Fit-Funktion eines CAS automatisch bestimmt (vgl. Weigand & Weller, 1997, S. 168). Sind die Parameter gefunden, kann die Funktion $m$ hinsichtlich ihrer Eigenschaften wie dem Verlauf, der Monotonie, den Extremwerten oder der Wendepunkte untersucht werden. Im zweiten Kapitel wird gezeigt, dass die Schätzung einzelner Parameter eine wichtige Rolle bei der Modellierung von Epidemien spielt.

**Schritt 4: Interpretation**

Diese Resultate müssen, dann – wie auch bei den zuvor erwähnten Modellbildungskreisläufen – hinsichtlich der Ausgangsfrage interpretiert werden (vgl. Engel, 1998, S. 97).

**Schritt 5: Modellkritik und Validierung**

Zuletzt wird untersucht, ob sich das Modell in Bezug auf die Ausgangssituation bewährt. In der stochastischen Modellierung ist es sinnvoll zunächst die Übereinstimmung von $m$ mit der Datenwolke im Streudiagramm sowie den Residuenplot zu betrachten (vgl. Engel, 1998, S. 101ff.). Eine Maßzahl für die Differenz zwischen geschätzter und unbekannter Funktion ist der mittlere integrierte quadratische Fehler (vgl. Engel, 1998, S. 104).

Passt das Modell noch nicht gut genug zu den Daten, die gemessen wurden, so versucht man ein anderes Modell mit anderen Parametern zu finden und durchläuft den Prozess erneut. Engel (vgl. 1998, S. 104f.) weist darauf hin, dass das Suchen nach einem parametrischen Modell sehr schwierig und langwierig sein kann und verweist daher alternativ auf die Möglichkeit der nichtparametrischen Methode.

### 1.1.5 Vergleich der verschiedenen Modelle

Vergleicht man die bisher beschriebenen theoretischen Konzepte zum Modellbilden, so fällt auf, dass das Modellieren von allen Autoren als zyklischer Prozess beschrieben wird. Der Kreislauf zwischen Mathematik und dem Rest der Welt kann mehrmals durchlaufen werden, bis ein wünschenswertes Resultat erreicht wird. Karl Josef Fuchs und Werner Blum (2008, S. 137) stellen dies ebenso fest und formulieren fünf Schritte, die bis auf kleine Unterschiede, allen oben erwähnten Theorien zur mathematischen Modellbildung gemein sind. Grundsätzlich umfasst der Modellbildungskreislauf zwei Übersetzungsprozesse zwischen der Mathematik und dem Rest der Welt.

Zunächst wird die reale Situation aufbereitet bzw. ein Realmodell konstruiert (1). Die Mathematisierung in ein mathematisches Modell (2) stellt den ersten Übersetzungsschritt dar. Das mathematische Modell wird darauf mit verschiedenen mathematischen Methoden bearbeitet (3) und die gewonnenen Resultate interpretiert (4). Die Interpretation stellt den zweiten Übersetzungsschritt dar. Dabei wird nach der Bedeutung und Gültigkeit der mathematischen Resultate für die reale Situation gefragt. Schließlich werden (5) die Ergebnisse dargestellt und erklärt und so die ursprüngliche Fragestellung beantwortet.

**1) Konstruieren**

Bei Blum und Leiß (2005) geht es darum die Ausgangssituation zunächst zu verstehen und dann aus den Vorstellungen der Situation (=Situationsmodell) ein strukturiertes bzw. präzisiertes Realmodell zu erstellen, das schließlich mathematisiert werden kann. So werden auch die kognitiven Aspekte des Modellbildens hervorgehoben.

Bei Weigand und Weller (1997) werden zunächst wichtige Zusammenhänge nach der Analyse der Situation qualitativ herausgearbeitet (Analyse) und schließlich dargestellt, nachgebildet oder simuliert (Simulation). Erst dann werden diese Zusammenhänge beim Mathematisieren in ein quantitatives Modell gefasst.

Bei Förster (2000, S. 121f.) wird durch das Erfassen, Strukturieren, Vereinfachen und Idealisieren der realen Situation ein Realmodell geschaffen. Damit ist das Konzept von Förster (2000) jenem von Blum und Leiß (2005) in diesem Punkt sehr ähnlich. Bei der stochastischen Modellierung nach Engel (1998) steht am Anfang jeder Modellbildung die Erhebung geeigneter Daten.

In allen vier Konzepten wird die Ausgangssituation analysiert und dadurch ein Realmodell geschaffen, das sich in weiterer Folge mathematisieren lässt.

**2) Strukturieren/Mathematisieren**

In allen vier Modellen folgt hierauf der Schritt des Mathematisierens zur Erstellung eines mathematischen Modells. Fuchs und Blum (2008) zählen hier auch das Strukturieren hinzu, während es bei Blum und Leiß (2005) und Förster (2000) bereits davor geschieht.

**3) Experimentieren/Operieren/Darstellen**

Darauf wird in allen Modellen das erstellte Mathematische Modell mit verschiedenen mathematischen Methoden bearbeitet. Weigand und Weller (1997) legen besonders auf das Experimentieren mit dem Modell wert. Beim stochastischen Modellbilden nach Engel (1998) geht es in diesem Schritt darum die passenden Werte für die Parameter im mathematischen Modell zu finden. Durch dieses Kalibrieren soll(en) die Modellfunktion (die Modellfunktionen) bestmöglich an die Daten angepasst werden.

**4) Interpretieren**

Die mathematischen Resultate werden anschließend in allen vier Konzepten beim Rücktransfer in die reale Welt interpretiert. Alle Autoren weisen hier darauf hin, dass Ergebnisse auf ihre Übereinstimmung mit der realen Situation hin kontrolliert bzw. validiert werden müssen. Genügt das Modell bei der Kontrolle nicht den Erfordernissen, so muss es modifiziert werden und der Kreislauf erneut durchlaufen werden. Auch hier stimmen alle Konzepte überein. Förster (2000) hebt besonders die Veränderung des Modells hervor, indem er sie als eigenen Schritt definiert. Das mathematische Modellbilden wird in allen vier theoretischen Konzepten als Kreislauf verstanden, der je nach Passung der Ergebnisse mehrmals durchlaufen wird.

**5) Dokumentieren/Erklären**

Bei Blum und Leiß (2005) sowie Weigand und Weller (1997) werden im letzten Schritt die gewonnenen Erkenntnisse dargestellt und durch das Modell erklärt. Die Kommunikation von Resultaten ist wesentlicher Bestandteil wissenschaftlichen Arbeitens. Daher ist es auch im Hinblick auf das Modellbilden im Mathematikunterricht wichtig, den Modellierungsprozess mit einer Dokumentation und Präsentation der eigenen Arbeit abzuschließen.

Zusammenfassend sind die vier diskutierten Modellbildungskonzepte zusammen mit der Einteilung der Schritte nach Fuchs und Blum (2008) in folgender Tabelle gegenübergestellt.

<table>
<tr><th>Fuchs & Blum</th><th>Blum & Leiß</th><th>Weigand & Weller</th><th>Förster</th><th>Engel</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Konstruieren</td><td>Konstruieren/ Verstehen</td><td>Analysieren</td><td rowspan="2">Realmodell erstellen (strukturieren, vereinfachen und idealisieren)</td><td rowspan="2">Datenerhebung</td></tr>
<tr><td>Vereinfachen/ Strukturieren</td><td>Simulieren</td></tr>
<tr><td>Strukturieren/ Mathematisieren</td><td>Mathematisieren</td><td>Mathematisieren</td><td>Mathematisieren</td><td>Mathematisierung</td></tr>
<tr><td>Experimentieren/ Operieren/ Darstellen</td><td>Mathematisch arbeiten</td><td>Experimentieren</td><td>Erarbeiten einer Mathematischen Lösung</td><td>Kalibrierung</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Interpretieren (inkl. Validieren/ Kontrollieren)</td><td>Interpretieren</td><td rowspan="2">Interpretieren (und kontrollieren)</td><td rowspan="2">Interpretieren und validieren</td><td>Interpretation</td></tr>
<tr><td>Validieren</td><td>Modellkritik und Validierung</td></tr>
<tr><td>Dokumentieren/ Erklären</td><td>Darstellen/ Erklären</td><td>Erklären/ Dokumentieren</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">Kreislaufgedanke</td></tr>
<tr><td></td><td>Modell modifizieren bzw. Ersetzen (nach Validieren)</td><td>Abänderung d. Modells (Siller, 2004, S. 23)</td><td>Erneuter Durchlauf als einzelnen Schritt</td><td>Erneuter Durchlauf (kein einzelner Schritt)</td></tr>
</table>

*Tabelle 1.1.5.1 Theoretische Konzepte zum Modellbilden nach Autoren und Schritten*

Die hier beschriebenen Konzepte mathematischen Modellierens haben somit alle gemein, dass sie zwischen Mathematik und dem Rest der Welt unterscheiden und Modellierung als einen zyklischen Prozess mit zwei Übersetzungsschritten beschreiben. Laut Kaiser et al (2015, S. 364) gibt es heute „ein gemeinsames und weitverbreitetes Verständnis von *Modellierungsprozessen*“.

> In nahezu allen Ansätzen wird der idealisierte Prozess der mathematischen Modellierung als ein zyklischer Prozess beschrieben, um reale Probleme durch die Nutzung von Mathematik zu lösen, dargestellt als ein Kreislauf, der unterschiedliche Stufen oder Phasen unterscheidet (Kaiser et al, 2015, S. 364).

## 1.2 Differenzierung von deskriptiven und normativen Modellen

Mathematische Modelle kann man nach ihrem Zweck in zwei Kategorien einteilen. Deskriptive Modelle dienen dazu die Realität mathematisch zu beschreiben, während durch ein normatives Modell *„die Realität zum Teil erst durch das Modell definiert“* wird (Förster, 2000, S. 125).

Beim Arbeiten mit einem normativen Modell geht es darum, die Zielvorstellungen der Modellbildnerin bzw. des Modellbildners möglichst genau umzusetzen (Förster, 2000, S. 125). Normative Modelle sind somit von subjektiven Motiven der Modellbildner beeinflusst. Bei Wahlen können beispielsweise Regeln eingeführt werden, die dazu führen, dass eine bestimmte Partei bevorteilt wird. Eine wichtige Funktion von normativen Modellen ist das Simulieren. Dadurch können die Auswirkungen von Änderungen des Modells auf die Realität abgeschätzt werden (vgl. Förster, 2000, S. 125). Beispiele für normative Modelle sind etwa *„Vorschriften für die Einkommensteuer, die Regeln bei einer Wahl oder die Spielregeln bei der nächsten Fußballweltmeisterschaft“* (Büchter & Henn, 2015, S. 34).

Bei deskriptiven Modellen geht es um eine möglichst exakte Beschreibung einer Situation in der realen Welt. Andreas Büchter und Hans-Wolfgang Henn differenzieren deskriptive Modelle nach ihren Funktionen (2015, S. 34):

- Modelle, die beschreiben („Wie haben sich die Einkommen entwickelt?“ …),
- Modelle, die vorhersagen („Wie ist das Wetter morgen?“ …), und
- Modelle, die erklären („Warum sehen wir einen Regenbogen?“ …)

Beispiele für deskriptive Modelle sind Modelle für das Populationswachstum, die Modellierung von Fallbewegungen und auch das im zweiten Teil dieser Arbeit beschriebene SIR – Modell zur Beschreibung der Ausbreitung von Infektionskrankheiten (vgl. Förster, 2000, S. 125).

Die Klassifizierung in deskriptive und normative Modelle ist nicht die einzig mögliche, jedoch ist sie für den Mathematikunterricht relevant, da damit zwei sehr grundliegende Funktionen von mathematischen Modellen hervorgestellt werden (vgl. Büchter & Henn, 2015, 35). Büchter und Henn (2015, S. 36f.) beschreiben wie sich durch eine veränderte Verwendung eines Modells der Charakter von deskriptiv auf normativ ändern kann. Im zweiten Kapitel wird dargestellt, wie deskriptive Modelle zur Ausbreitung von Infektionskrankheiten zur normativen Bestimmung von Maßnahmen führen.

## 1.3 Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Modellbildung

Mathematische Modelle, ob normativ oder deskriptiv können in verschiedensten Bereichen eingesetzt werden. Trotzdem sind der mathematischen Modellierung auch Grenzen gesetzt, die es zu beachten gilt.

In den Wissenschaften können mathematische Modelle durch die Vereinfachung und Vereinheitlichung komplexer Systeme zur Theoriebildung beitragen (vgl. Förster, 2000, S. 126). Aber in der Praxis bieten mathematische Modelle auch einige Vorteile gegenüber Experimenten oder physikalischen Modellen. Ein Vorteil mathematischer Modelle ist die *Kosteneffizienz*. So kann man zum Beispiel die aerodynamischen Eigenschaften eines Fahrzeugs per Computersimulation bestimmen, bevor ein Prototyp gebaut und im Windkanal getestet wird (vgl. Förster, 2000, S. 126). Ein weiterer Vorteil ist die *Zeitunabhängigkeit* der mathematischen Darstellungen. Dynamische Prozesse können in der Simulation beschleunigt oder verzögert dargestellt werden und so besser beobachtet werden (vgl. Förster, 2000, S. 126). Mathematische Modelle sind außerdem *zeiteffizient*. Sie bieten die Möglichkeit in kurzer Zeit sehr viele Szenarien durchzuspielen. Darüber hinaus dauert die Berechnung häufig weniger lange als die Erhebung die Daten in einem realen Experiment.[2] Ein zusätzlicher Vorteil mathematischer Modelle liegt in ihrer Anwendung. Sie ist *ungefährlich*. Damit können auch Situationen modelliert werden, in denen Experimente zu einem großen Schaden führen würden, wie etwa das Training von Piloten am Flugsimulator oder die Simulation von Kernreaktorunfällen (vgl. Förster, 2000, S. 126). In solchen Situationen dienen mathematische Modelle als *Entscheidungshilfen* für oder gegen bestimmte Handlungsalternativen (vgl. Förster, 2000, S. 126). Im zweiten Kapitel wird dargestellt, wie in der Situation der Covid-19 Pandemie mathematische Modelle eine Entscheidungsgrundlage für oder gegen bestimmte infektionspräventive Maßnahmen bieten können.

Auch wenn hier die Realität durch das mathematische Modell ersetzt wird, muss immer bedacht werden, dass stets ein *Unterschied zwischen Mathematik und Rest der Welt* bestehen bleibt (vgl. Förster, 2000, S. 126). Diese Differenz kommt zum Beispiel durch Messfehler, ungenauen Annahmen und Vereinfachungen zustande.

[2] Das Mercedes Formel 1 Team simuliert zum Beispiel vor jedem Rennen hunderttausende Runden unter verschiedensten Fahrzeug-Einstellungen und Rennstrategien am Computer vgl. dazu: https://www.mercedesamgf1.com/en/news/2020/portugal-grand-prix/how-does-f1-simulation-work/ (abgerufen am 23.02.2021).

Sehr komplexe Modelle haben zusätzlich den Nachteil, dass sie häufig nicht mehr analytisch lösbar sind. Werden sie numerisch gelöst, kommt es auch hier – je nach angewandtem Verfahren – zu größeren oder kleineren Fehlern. Eine wichtige Frage, die sich beim Validieren eines mathematischen Modells stellt, ist die nach der Größenordnung des Fehlers.

Beim Modellieren werden unwesentliche Details nicht berücksichtigt. „*Welche Details wesentlich sind, hängt von der Fragestellung und den Interessen der Akteure ab“* (Büchter & Henn, 2015, S. 32). Mathematische Modelle sind daher immer subjektiv geprägt und so ist

> stets die Gefahr einer Missinterpretation …, von Missbrauch und Manipulation immanent. Eine kritische Modellanalyse muss also stets auch fragen, wem und wozu das Modell dient und ob es jemanden Vorteile bringen könnte. (Büchter & Henn, 2015, S. 33).

Durch subjektiv unterschiedliche Zielvorstellungen kann es also zu unterschiedlichen mathematischen Modellen zu ein und derselben Situation kommen. Etwa bei der Frage, wie viele Arbeitslose es in einem Staat gibt, hängt die Antwort im Wesentlichen davon ab, wie Arbeitslosigkeit definiert wird. Liegt es im eigenen Interesse von einer niedrigen Arbeitslosigkeit zu sprechen, kann man zum Beispiel nur jene Personen, die über das Arbeitsamt eine Beschäftigung suchen, als Arbeitslose zählen, um die Zahlen zu schönen (vgl. Förster, 2000, S. 127).

Werden diese Limitationen mathematischer Modellierung missachtet, so kann der daraus resultierende Fehler einer von drei idealtypischen Kategorien zugeordnet werden (vgl. Schmidt, 1992, 10f.).

- *Innermathematische Verfahrensfehler* entstehen beim Erarbeiten der mathematischen Lösung. Bleiben sie unentdeckt zeichnen sie ein verfälschtes Bild der Realität.
- Von *Modellbildungsfehlern* spricht man, wenn das mathematische Modell an sich fehlerhaft ist. Sie entstehen durch fehlerhafte Modellannahmen. Um derartige Fehler identifizieren zu können ist häufig fachliche Expertise gefragt.
- *Entscheidungsfehler für die mathematische Modellbildung*: In manchen Situationen ist eine mathematische Modellierung unpassend. Die ethische Frage nach der Abschaffung der Todesstrafe beispielsweise erschließt sich nicht allein durch Berechnungen der Auswirkungen einer solchen Maßnahme auf die Gesellschaft.

Mathematische Modellierung ist also einerseits ein Werkzeug, dass für sehr vielseitige Problemstellungen zur Hilfe gezogen werden kann. Gleichzeitig hat sie aber auch ihre Grenzen, die stets beachtet werden müssen. Dies gilt auch für das mathematische Modellbilden im Unterricht (vgl. Blum, 1985, S. 212). Da mathematische Modelle immer eine Vereinfachung darstellen, stellt sich die Frage, in welchem Genauigkeitsbereich die Ergebnisse zu erwarten sind (vgl. Büchter & Henn, 2015, S. 41f.).

## 1.4 Die Rolle von digitalen Werkzeugen im Modellbildungskreislauf

In den letzten Jahren spielt der Technologie-Einsatz im Mathematikunterricht eine immer größere Rolle. Auch der österreichische Lehrplan für die allgemeinbildenden höheren Schulen verlangt den Einsatz von Technologien im Mathematikunterricht (Rechtsinformationssystem des Bundes (RIS), 2021a). Digitale Werkzeuge sind *„vor allem digitale Medien, wie Computer, Tablet, Smartphone oder Handheld, die im Mathematikunterricht zum Bearbeiten von Aufgabenstellungen in spezifischer Weise genutzt werden“* (Greefrath & Siller, 2018, S. 7).

Alle bisher erwähnten Autoren verweisen darauf, dass digitale Werkzeuge beim Modellieren als Unterstützung dienen (vgl. u.a. Blum, 1985; Weigand & Weller, 1997; Förster, 2000; Engel 2000). Siller und Greefrath (2018, S. 2137) erweitern den Modellbildungskreislauf von Blum und Leiß (2005) um den Bereich der Technologie (Abbildung 1.4.1). Nach dem Übersetzungsprozess des Mathematisierens wird das mathematische Modell in die (Programmier-)Sprache des Computers übertragen. Wie die Implementierung erfolgt und welche Möglichkeiten zum Lösen eines mathematischen Modells vorhanden sind, hängt vor allem von der Wahl des digitalen Werkzeugs ab. Tabellenkalkulationen eignen sich beispielsweise zur Verarbeitung großer Datenmengen sowie für Berechnungen in rekursiv definierten Modellen. Mit einem CAS lassen sich beispielsweise Modelle berechnen, die in Form von Gleichungssystemen vorliegen. Der Computer übernimmt in großen Teilen das mathematische Operieren. Die Zuhilfenahme von digitalen Werkzeugen beim mathematischen Arbeiten kommt wohl der ursprünglichen Verwendung von Computern als Rechenmaschinen am nächsten.

Das erweiterte Modell (Abbildung 1.4.1) allein würde jedoch ein eingeschränktes Bild von den Anwendungsmöglichkeiten digitaler Werkzeuge beim Modellieren geben (Greefrath, 2011, S. 301). Mittlerweile sind Digitale Werkzeuge weit mehr als Rechenmaschinen und können daher in jeder Phase des Modellbildens sinnvoll eingesetzt werden (Kaiser, Blum, Borromeo Ferri & Greefrath, 2015, S. 372). Greefrath und Siller (2018, S. 9-13) stellen daher als Ergänzung zu ihrem Modell einige Möglichkeiten zum Einsatz von digitalen Werkzeugen beim Modellbilden dar (Abbildung 1.4.2):

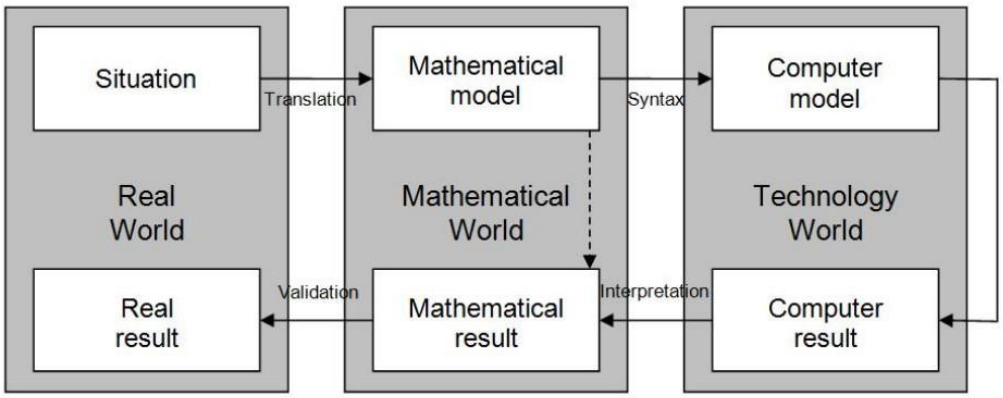



*Abbildung1.4.1 Der erweiterte Modellbildungskreislauf (Siller & Greefrath 2009)*

**1) Recherchieren**

Modellierungsaufgaben bestehen häufig in offene Fragestellungen. Das bedeutet, dass mit der Problemstellung noch nicht alle nötigen Informationen gegeben sind. Häufig erfordern Modellierungsaufgaben auch inhaltliche Kenntnisse der Ausgangssituation. Digitale Werkzeuge mit Internetanbindung können dazu verwendet werden, sich ausführlich über die Ausgangssituation zu informieren und benötigte Daten zu recherchieren (vgl. Greefrath & Siller, 2018, S.9). Im zweiten Teil dieser Arbeit werden so etwa mithilfe des Computers die Datensätze der österreichischen Agentur für Gesundheit und Ernährungssicherheit GmbH (AGES) heruntergeladen. Darüber hinaus kann auch nach bereits existierenden Modellen zur eigenen Ausgangslage gesucht werden. Diese Modelle müssen in weiterer Folge nur mehr an die speziellen Erfordernisse der eigenen Situation angepasst werden.

**2) Experimentieren**

Digitale Werkzeuge eignen sich auch dazu mathematische Zusammenhänge durch experimentelles Arbeiten zu entdecken (Greefrath & Siller, 2018, S. 9). Das mathematische Modell kann in einem Geometrieprogramm dargestellt werden. Außerdem können verschiedene Werte für einzelne Parameter ausprobiert werden, um z.B.: eine erste Vorstellung von Kurvenverläufen bekommen (vgl. z.B.: Weigand & Weller, 1997, S. 163ff.). Es kann auch versucht werden, verschiedene Funktionstypen an ein Streudiagramm anzupassen, um so eine Vorstellung von dem zu beschreibenden Zusammenhang zu bekommen. Freie Parameter der Funktion können dann beispielsweise per Schieberegler kontrolliert werden und provisorisch geschätzt werden.

### 3) Visualisieren

Digitale Werkzeuge bieten vielfältige Möglichkeiten zur Darstellung von Sachverhalten. So können Datensätze auf verschiedenste Art visuell zusammengefasst werden, um einen Ausgangspunkt für die Erstellung eines mathematischen Modells zu erhalten (vgl. Greefrath 2011, S. 302). Genau so können später die mathematischen Ergebnisse dargestellt werden, um die folgende Interpretation zu unterstützen (vgl. Greefrath, 2011, S. 302). Digitale Werkzeuge bieten häufig die Möglichkeit mehrere Präsentationsformen parallel, also in verschiedenen Ansichtsfenstern nebeneinander zu verwenden (vgl. Fuchs & Plangg, 2018, S. 39). So können Funktionen gleichzeitig als Graph und in ihrer symbolischen Form dargestellt werden. Werden dann einzelne Parameter der Funktion, bzw. allgemeiner des Modells geändert, so können direkt die Auswirkungen der Änderungen auf die graphische Darstellung beobachtet werden.

### 4) Berechnen

Der Einsatz von digitalen Werkzeugen ermöglicht die zeiteffiziente Berechnung algebraischer oder numerischer Ergebnisse (Kaiser et al, 2015, S. 372). Im Mathematikunterricht können so Problemstellungen bearbeitet werden, die sonst zu komplex oder zu rechenaufwändig wären. Algorithmen oder Anweisungen, die die Operationen ausführen, können im Sinne des White-Box-Prinzips selbst erstellt werden oder im Sinne des Black-Box-Prinzips auf ein mathematisches Modell angewendet werden. Aus gegebenen Informationen können auch algebraische Darstellungen gewonnen werden. So kann man zum Beispiel aus mehreren Datenpunkten die Gleichung einer Polynomfunktion, deren Graph die gegebenen Punkte enthält, vom Computer berechnen (vgl. Kaiser et al, 2015, S. 372). Im zweiten Kapitel wird unter anderem ein Tabellenkalkulationsprogramm verwendet, um schnell viele Glieder von rekursiven Folgen zu berechnen.

### 5) Simulieren

Es gibt Situationen, die es aus verschiedensten Gründen (ethisch, ökonomisch,…) nicht ermöglichen mit verschiedenen Lösungsansätzen zu experimentieren. In einer solchen Situation kann die reale Situation mithilfe eines mathematischen Modells simuliert werden. Greefrath und Siller (2018, S. 13) fassen Simulationen *„als Experimente mit mathematischen Modellen, die Erkenntnisse über das im Modell dargestellte reale System oder das Modell selbst liefern sollen“* auf. Digitale Werkzeuge eignen sich besonders für Simulationen mithilfe

eines mathematischen Modells, da sehr schnell viele verschiedene Situationen durchgerechnet werden können. Simulationen bieten sich auch dann an, wenn ein Modell analytisch nicht gelöst werden kann. Dazu wird das Mathematische Modell zunächst diskretisiert, also in ein numerisches Modell umgewandelt, welches vom digitalen Werkzeug gelöst wird (Greefrath & Siller, 2018, S. 15).[3] Durch einen Vergleich mit Messergebnissen kann das Modell schließlich validiert werden (Greefrath & Siller, 2018, S. 15). Im zweiten Kapitel werden dynamische - also zeitabhängige - Modelle simuliert, um die zeitliche Entwicklung der Covid-19-Pandemie in Österreich zu prognostizieren.

### 6) Kontrollieren

Zum Modellieren gehört es auch, dass die Ergebnisse mit der Realität abgeglichen werden, also validiert werden. Digitale Werkzeuge können auch zur Kontrolle von Lösungen eingesetzt werden. Numerische Ergebnisse können mit Graphen abgeglichen werden. Wie bereits in 1.1.4. erwähnt, kann die Übereinstimmung von realen Daten mit dem Modell mithilfe der Methode der Kleinsten-Quadrate oder der Analyse von Residuen kontrolliert werden. Alternativ können die gemessenen Datenpunkte mit der eingepassten, modellierten Kurve verglichen werden (vgl. Greefrath & Siller 2018, S. 10).

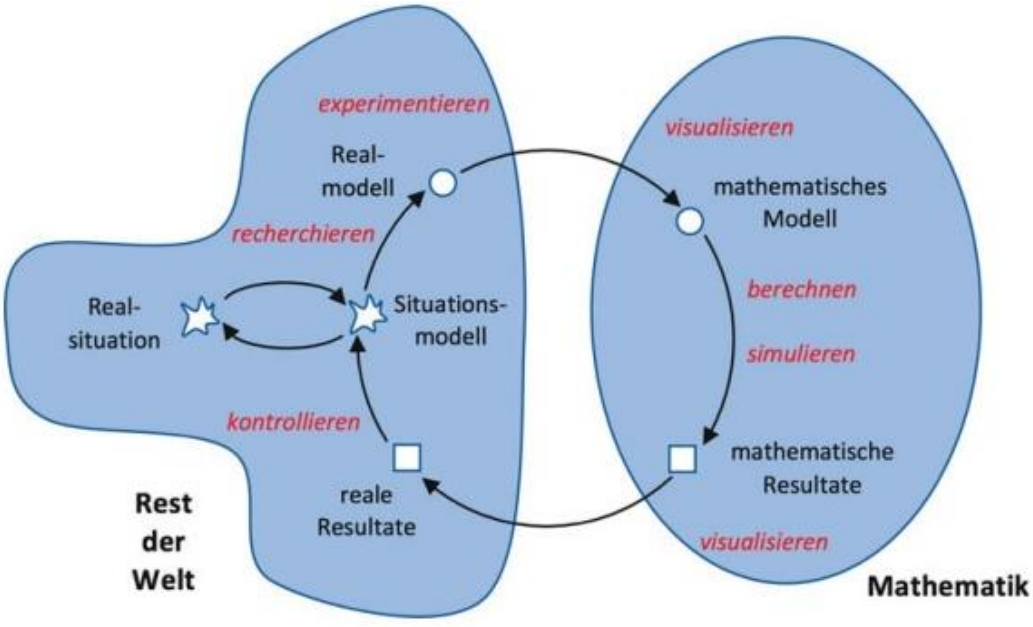



*Abbildung 1.4.2 Nutzung digitaler Werkzeuge beim Modellieren (Greefrath & Siller, 2018, S. 12)*

[3] Bei vielen digitalen Werkzeugen (z.B.: GeoGebra oder Wolfram Alpha) geschieht der Transfer in ein numerisches Modell meist im Hintergrund als Black Box über vorprogrammierte Befehle wie z.B.: NLöseDGL bzw. NDSolve)

Digitale Werkzeuge übernehmen also besonders rechenintensive oder deterministische Aufgaben, wie das Durchlaufen von Algorithmen. Sie helfen auch bei der Bearbeitung, dem Strukturieren und Evaluieren großer Datensätze. Außerdem unterstützen sie das Experimentieren sowie das Visualisieren von Prozessen und Ergebnissen (Siller & Greefrath, 2009, S. 2138f.). So wird das Modellieren sehr vielseitig in allen Phasen unterstützt. Dadurch wird die Behandlung von komplexeren und damit realitätsnäheren Problemstellungen ermöglicht (Siller & Greefrath, 2009, S. 2138). Siller und Greefrath (2009, S. 2138) sehen darin vor allem eine Chance, Lernenden die Nützlichkeit von Mathematik für das alltägliche Leben zu vermitteln und sie zur Auseinandersetzung mit Mathematik zu motivieren.

## 1.5 Modellbilden im kompetenzorientierten Mathematikunterricht

Spätestens seit Beginn des 20. Jahrhunderts wird, aufgrund der zunehmenden Industrialisierung und Technisierung, für den schulischen Mathematikunterricht eine Orientierung an realitätsnahen Problemstellungen gefordert (Büchter & Henn, 2015, S. 24). In der Diskussion um Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht verlangt bereits Freudenthal (1973, S. 76), dass Schülerinnen und Schüler nicht nur Anwendungen von Mathematik im Unterricht kennen lernen, sondern, dass sie lernen, wie Mathematik auf praktische Probleme angewendet werden kann. Das Anwenden von Mathematik auf reale Situationen geschieht durch die mathematische Modellierung. Mathematikunterricht muss daher den Modellbildungsprozess den Lernenden nahebringen und den Erwerb der zugehörigen Kompetenzen ermöglichen (Büchter & Henn, 2015, S. 25). Im Folgenden wird auf die Gründe und Ziele des Modellierens im Mathematikunterricht, die Umsetzung eines anwendungsorientierten Unterrichts und die damit einhergehenden Herausforderungen eingegangen. Zuletzt wird ausgeführt welche Rolle das Modellieren in den österreichischen Lehrplänen der allgemeinbildenden höheren Schulen (AHS) hat.

### 1.5.1 Argumente für das Modellbilden im Mathematikunterricht

In der fachdidaktischen Diskussion zum Modellieren werden im Wesentlichen fünf Gründe für Modellbilden im Mathematikunterricht genannt (vgl. Büchter und Henn, 2015, S. 29 bzw. Kaiser et al, 2015, S. 361). Diese Argumente haben bereits Werner Blum und Mogens Niss (1991) in einem Überblick zum Stand der – damals – aktuellen Forschung dargestellt.

**1) Das utilitaristische Argument**

Mathematik ist vor allem als Hilfswissenschaft für andere Fächer bzw. außermathematische Anwendungen nützlich. Das mathematische Modellieren muss eigens gelernt und eingeübt werden. Das mathematische Wissen allein reicht dafür nicht aus. Die Schülerinnen und Schüler sollten befähigt werden Mathematik als Werkzeug in verschiedensten Kontexten benützen zu können (Blum & Niss, 1991, S. 43).

**2) Pragmatisches Argument**

Das Modellieren hilft Schülerinnen und Schülern Umweltsituationen zu verstehen und zu bewältigen. Sie sollten mathematische Modelle und damit verbundene Lösungen für Problemsituationen kritisch hinterfragen und bewerten können (vgl. Blum & Niss, 1991, S. 43).

Diese Kompetenz ist besonders wichtig, da Modelle immer von subjektiven Zielvorstellungen mitgeprägt sind (Büchter & Henn, 2015, S. 33). So trägt das Modellbilden zur Erziehung mündiger Bürgerinnen und Bürger und qualifizierter Arbeitskräfte bei (Büchter & Henn 2015, S. 29).

**3) Formale Argumente**

Durch das mathematische Modellieren und Lösen von Anwendungsproblemen werden Metakompetenzen gefördert, wie etwa das forschende und kreative Denken, das Problemlösen sowie das Argumentieren. Diese allgemeinen Kompetenzen gehen über die rein mathematischen Fähigkeiten hinaus. Sie sind für die Lernenden auch über die Schulkarriere hinaus wertvoll (vgl. Blum & Niss, 1991, S. 42f.)

**4) Kulturbezogene Argumente**

Wenn Mathematik als kulturelles Gesamtphänomen in seiner Vielfältigkeit vermittelt werden soll, dann müssen auch Anwendungen und mathematische Modellierungen im Mathematikunterricht einen festen Platz haben (vgl. Blum & Niss, 1991, S. 43). Dazu gehört auch die Vermittlung des *Relevanz-Paradoxons*. Damit ist gemeint, dass die Bedeutung der Mathematik objektiv im digitalen Zeitalter steigt, während es auf subjektiver Ebene scheint, als würde die Mathematik an Relevanz für das alltägliche Leben verlieren (vgl. Büchter & Henn, 2015, S. 29). Damit ein vollständiges Bild der Mathematik und seiner Rolle für die Gesellschaft vermittelt wird, sind auch die *„Möglichkeiten und Grenzen des Gebrauchs und Missbrauchs von Mathematik aufzuzeigen“* (Förster, 2000, S. 132). Modellbilden ist für die Mathematik derart bedeutend, dass Siller (2008) sie in seiner Dissertation sogar als *„eine zentrale Leitidee der Mathematik“* vorstellt.

**5) Lernpsychologische Argumente**

Durch die Modellierung geeigneter Problemstellungen im Unterricht erleben die Lernenden Mathematik als nützliches Instrument. Dadurch kann sich deren Motivation steigern und Einstellung dem Fach gegenüber verbessern (vgl. Förster, 2000, S. 132). Gleichzeitig unterstützt das Arbeiten *„mit realitätsnahen Problemen das Verstehen mathematischer Inhalte und den Aufbau adäquater Grundvorstellungen“* (Büchter & Henn, 2015, S. 29). Damit die Einstellung der Lernenden tatsächlich verbessert werden kann, sollte bei der Auswahl der Beispiele an die Interessen der Lerngruppe angeknüpft werden (vgl. Förster, 2000, S. 133).

### 1.5.2 Umsetzung im Unterricht

Es gibt viele verschiedene Ansätze und Perspektiven zur Frage, wie mathematisches Modellieren im Mathematikunterricht stattfinden kann. Mathematisches Modellieren muss aber in jedem Fall über das Vorführen von Standardmodellen hinausgehen, *„sondern ein bewußtes [sic!] Arbeiten mit und Erarbeiten von Modellen beinhalten“* (Förster, 2000, S. 133). Kaiser et al (2015, S. 362f.) geben einen Überblick über die aktuell diskutierten Ansätze.

Zwei unterschiedliche Ansätze zur Förderung von Modellierungskompetenzen sind der *holistische* und der *atomistische Ansatz* (Kaiser et al, 2015, S. 371). Der holistische Ansatz meint, dass Modellbilden im Mathematikunterricht im Rahmen von Projekten stattfinden soll, in denen Lernende *„über einen längeren Zeitraum hinweg Modellierungsprobleme bearbeiten“* (Kaiser et al, 2015, S. 359). Der atomistische Ansatz schlägt im Gegensatz dazu vor, *„Modellierungsaktivitäten als kurzfristige Tätigkeit in den normalen Unterricht einzubetten“* (Kaiser et al, 2015, S. 259). Dabei muss nicht jedes Mal der gesamte Modellbildungszyklus durchlaufen werden, sondern nur einzelne Schritte, wie etwa die Interpretation eines gegebenen Modells. Eine empirische Studie von Susanne Brand (2014, S. 297ff.) kommt zu dem Ergebnis, dass sowohl der atomistische als auch der holistische Modellierungsansatz für die Förderung von Modellierungskompetenzen geeignet sind. Leistungsschwächere oder sehr leistungsheterogene Schulklassen werden aber durch den holistischen Ansatz effektiver gefördert (Brand, 2014, S. 300). Der Grund dafür könnte sein, dass Aufgaben im Rahmen des holistischen Ansatzes deutlich offener sind. Sie können dadurch von den Lernenden entsprechend ihren Fähigkeiten gelöst werden, während beim atomistischen Ansatz häufig vorgegebene Modelle verstanden werden müssen, die dann weiter interpretiert werden (Brand, 2014, S. 300).

Büchter und Henn (2015, S. 37f.) weisen darauf hin, dass es für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht gute Beispiele braucht. Häufig jedoch *„würden vermeintliche Anwendungsaufgaben, … den Zielsetzungen eines realitätsbezogenen Mathematikunterrichts nicht in Ansätzen entsprechen“* (Büchter & Henn, 2015, S. 37). Traditionelle Aufgabenstellungen sind häufig eng formuliert und geben die Mathematik, die zur Lösung benötigt wird, bereits vor. In diesem Fall wir den Lernenden das eigenständige Modellieren abgenommen. Das Lösen eingekleideter Aufgaben reicht nicht aus, um umfassende Modellierungskompetenzen zu erlangen. Trotzdem können sie sinnvoll eingesetzt werden, da

sie sich zum Einüben von Standardmathematisierungen und zum *„separaten Üben der Übersetzungsvorgänge zwischen Realität und Mathematik“* (Förster, 2000, S. 138f.) eignen.

Bei echten Modellierungsaufgaben ist das mathematische Modell noch nicht vorgegeben und muss erst im Rahmen den Modellbildungsprozess erarbeitet werden. Mathematik wird hier zur Klärung einer außermathematischen Situation angewandt (Förster, 2000, S. 137). Somit gibt es mehrere korrekte Möglichkeiten Modellierungsaufgaben zu lösen (vgl. Blum & Leiß, 2005, S. 18). Offene Aufgaben bieten Schülern die Möglichkeit die Problemstellung auf dem eigenen Leistungsniveau zu bearbeiten und stellen so eine Möglichkeit zur Binnendifferenzierung dar (Maaß, 2005). Fuchs und Blum (2008, S. 136) verstehen unter einer Modellierungsaufgabe *„eine Problemstellung, die von den Schülerinnen und Schülern substantielle Übersetzungsleistungen beim Übergang zwischen Realität und Mathematik einfordert.“* Das führt einerseits zur kognitiven Aktivierung der Lernenden, andererseits benötigen Lernende gerade am Anfang Unterstützung, um diese Übersetzungsleistungen zu meistern. Blum und Leiß (2005, S. 21) plädieren hier für eine Mittelposition der Lehrenden zwischen a) die Lernenden alles allein machen zu lassen (*„durch die Wüste laufen lassen“*) oder b) dem Vorzeigen der Lösung (*„die Schüler über die Hürde tragen“*). Nach Christoph Ableitinger (2010, S. 113f.) eignet sich der fragend-entwickelnde Unterricht für eine subtile Art der Unterstützung. Die Bearbeitung von Modellierungsaufgaben folgt zumeist in Gruppen mit anschließender Präsentation und Diskussion im Plenum (vgl. Ableitinger, 2010, S. 113 und Fuchs & Blum, 2008, S. 137).

### 1.5.3 Herausforderungen

Das Unterrichten mit Modellierungsaufgaben geht auch mit einigen Herausforderungen einher. Modellieren, besonders die Umsetzung von umfassenden Modellierungsprozessen im Sinne des holistischen Ansatzes, beansprucht viel Zeit, die im Mathematikunterricht häufig sehr knapp bemessen ist. Daher sollte bereits früh mit dem mathematischen Modellieren angefangen werden (vgl. Ableitinger, 2010, S. 113). Förster (2000, S. 142) schlägt vor, dass zugunsten von Modellierungsaufgaben, wie zum etwa Extremwertaufgaben, auf rein innermathematische Beispiele wie etwa die Kurvendiskussion, in denen es nur um das Einüben von Techniken geht, verzichtet werden kann. Darüber hinaus geht es nicht darum in jeder Mathematikeinheit Modellbildungskompetenzen zu vermitteln. Die Umsetzung kann auch in einzelnen Anwendungs-Inseln oder in Form von (fächerübergreifenden) Projekten geschehen (Kaiser et al. 2015, S. 361). Außerdem gibt es viele Stoffgebiete, die durch passende

Anwendungen *„mit Leben gefüllt“* werden können (Blum 1985, S. 216). Da aktuelle Lehrpläne dem Modellbilden ohnehin einen festen Platz einräumen (vgl. 1.5.4.) stellt sich die Frage, ob für das Modellieren Unterrichtszeit verwendet werden soll, nicht mehr.

Eine weitere Herausforderung ist, dass realitätsbezogene Aufgaben immer über ausreichendes Wissen über die außermathematische Situation verlangen. Für Lehrkräfte bedeutet dies für die meisten Anwendungsfelder einen erheblichen Mehraufwand, da sie sich, dieses Wissen aneignen müssen (vgl. Blum, 1985, S. 209f.). Zusätzlich wird beim Modellieren von realistischen Situationen die benötigte Mathematik sehr schnell komplex. Für Schülerinnen und Schüler sowie Lehrerinnen und Lehrer sind realitätsbezogene Aufgaben damit mit höheren Ansprüchen verbunden (vgl. Weigand & Weller, 1997, S. 162f). Zudem ist es schwierig angemessen komplexe Modellierungsaufgaben zu generieren, die nicht zu viel außermathematisches Wissen verlangen und gleichzeitig realistisch genug sind (vgl. Weigand & Weller, 1997, S. 162). Da sich Daten aber auch Zusammenhänge immer wieder ändern, veralten Anwendungsbeispiele in der Literatur auch recht schnell (vgl. Förster, 2000, S. 142.). Hierbei kann es sinnvoll sein, Informationen aus dem Internet abzurufen, um die Beispiele zu aktualisieren. Mittlerweile lassen sich in der fachdidaktischen Literatur viele gute und aktuelle Beispiele finden (vgl. Büchter & Henn, 2015, S. 37). Zum Beispiel bringt die Mathematik Unterrichts-Einheiten Datei Gruppe(MUED)[4] immer wieder Beispiele zu aktuellen Themen heraus.

Zuletzt stellt sich auch die Frage, wie die angestrebten Lernziele angesichts der offenen Aufgabenstellungen überprüft werden können. Ein Ansatz ist es *„dem Erarbeiten und Verbalisieren von Ansätzen, dem Argumentieren und Begründen mehr Gewicht zugewiesen wird als in herkömmlichen Aufgaben“* (Förster ,2000, S. 145). Dadurch verliert das sehr leicht zu beurteilende mathematische Operieren an Gewicht und der *„Ermessenspielraum, und damit der Aufwand der Lehrenden*“ vergrößert sich (Förster, 2000, S. 145). Katja Maaß (2005, S. 21) schlägt bei der Beurteilung von Modellierungsaufgaben vor, jeden Schritt des Modellbildungskreislaufes mit einer bestimmten Anzahl von Punkten zu bewerten.

[4] https://www.mued.de/

### 1.5.4 Modellieren als Handlungsdimension in den österreichischen Bildungsstandards

Mathematisches Modellieren stellt in den kompetenzorientierten Lehrplänen der Sekundarstufe in Österreich eine eigene Handlungsdimension dar. Das dreidimensionale Kompetenzmodell für die Sekundarstufe I. (RIS, 2021b) umfasst die *Inhaltsdimension*, die *Handlungsdimension* und die *Komplexitätsdimensionen.* Die Inhaltsdimension wird in die Bereiche *Zahlen und Maße (I1), Variable, funktionale Abhängigkeiten (I2), Geometrische Figuren und Körper (I3)* und *Statistische Darstellungen und Kenngrößen (I4)* untergliedert. Diese Inhalte werden mit den vier Handlungsbereichen Darstellen, *Modellbilden (H1), Rechnen, Operieren (H2), Interpretieren (H3)* und *Argumentieren, Begründen (H4)* sowie mit den drei Komplexitätsbereichen *Einsetzen von Grundkenntnissen und -fertigkeiten (K1), Herstellen von Verbindungen (K2)* und *Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren (K3)* in Verbindung gesetzt. Neben dem Modellbilden als Handlungskompetenz stellen auch die weiteren Handlungsdimensionen das *Rechnen und Operieren (H2), das Interpretieren (H3)* sowie *das Argumentieren und Begründen (H4)* Kompetenzen dar, die beim Durchlaufen des Modellbildungskreislauf benötigt werden. Damit ist das Modellbilden ein wesentliches Organisationsprinzip der Bildungsstandards der Sekundarstufe I.. Für die Sekundarstufe II., bei der zwischen Mathematik in den AHS und Angewandte Mathematik in den berufsbildenden höheren Schulen (BHS) unterschieden wird gelten im Wesentlichen ähnliche Kompetenzmodelle (RIS, 2021a und Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung, 2021). Eine strukturelle Darstellung und Bewertung der einzelnen Modelle geben Karl Josef Fuchs und Christian Kraler in ihrer Publikation zu den Bildungsstandards (Fuchs & Kraler, 2020, S. 487ff).

# 2. Praktischer Teil – Modellierung der Ausbreitung von Infektionskrankheiten

Seit dem Ausbruch der Covid-19-Pandemie werden mathematische Modelle zum Verlauf der Pandemie in den Medien diskutiert (vgl. Sill, 2020 oder Endt, Mainka, & Müller-Hansen, 2020) Sie werden von der Politik als Entscheidungsgrundlage für Maßnahmen zur Eindämmung der Infektionskrankheit verwendet (vgl. t-online.de, 13.3.2020). Die mathematische Epidemiologie befasst sich damit, den Verlauf einer Epidemie bzw. Pandemie zu modellieren (Ableitinger, 2010, S. 19). Einfache Modelle beschreiben die Verbreitung einer Infektionskrankheit rein zeitlich, während bei komplexeren Modellen auch die räumliche Ausbreitung eine Rolle spielt (vgl. Bock & Bracke, 2018, S. 121).

Die Behandlung derartiger Modelle im Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. bietet sich aufgrund der Aktualität des Themas sowie der Verfügbarkeit von Daten an. Darüber hinaus kann die Modellierung von Infektionsgeschehen in verschiedenen Schuljahren in unterschiedlicher Komplexität erfolgen.

In diesem Kapitel wird nun in mehreren Durchläufen die Modellierung der Ausbreitung von Sars-Cov-2 in Österreich anhand der Daten der Agentur für Gesundheit und Ernährungssicherheit GmbH (AGES, 2020) exemplarisch durchgeführt. Dabei werden die CAS von GeoGebra[5] und Mathematica[6] und das Tabellenkalkulationsprogramm MS Excel[7] verwendet. Die hier vorgestellten Modelle zum Infektionsgeschehen sind sehr einfach und entsprechen nicht dem wissenschaftlichen Standard. Vorrangiges Ziel dieser Modellierungen ist es jedoch den Prozess der mathematischen Modellbildung anhand eines realen Problemfeldes mit realen Daten auf dem Niveau der Sekundarstufe II. darzustellen.

Zunächst wird die zeitliche Verbreitung der Krankheit mit den einfachen Modellen des exponentiellen bzw. logistischen Wachstums beschrieben (2.1). Darauf aufbauend wird eine Modellierung mithilfe eines Suszeptible-Infectious-Removed-Modells (SIR-Modell) dargestellt (2.2). Komplexere Varianten dieses Modells bzw. Kombinationen mit räumlichen Modellen kommen auch in der aktuellen Forschung zur Ausbreitung der Covid-19 Pandemie zum Einsatz

[5] https://www.geogebra.org/
[6] https://www.wolfram.com/mathematica/
[7] https://www.microsoft.com/de-at/microsoft-365/excel

(vgl. z.B.: Cooper, Mondal & Antonopoulus, 2020). Der Modellierungsprozess wird schließlich mit dem Vergleich und der Diskussion der Resultate der einzelnen Modelle abgeschlossen (2.3).

## 2.1 Einfache Modelle – exponentielles und logistisches Wachstum

Der Vorteil einfacher Modelle ist, dass sie nicht nur leicht umsetzbar, sondern auch sehr leicht kommunizierbar sind. Zudem besitzen sie eine sehr gute Passung zum Lehrstoff der Sekundarstufe. Mit der Modellierung der Ausbreitung von Sars-Cov-2 mittels eines exponentiellen Wachstums wird schnell ersichtlich, warum bereits bei relativ wenigen infizierten Personen Maßnahmen zur Eindämmung der Ausbreitung ratsam sind (vgl. Elschenbroich, 2020, S. 193f.). Offensichtlich jedoch kann sich der Virus nicht unbegrenzt mit exponentieller Geschwindigkeit ausbreiten. Daher ist es für längerfristige Prognosen sinnvoll von einem logistischen Wachstum auszugehen (vgl. Elschenbroich, 2020, S. 193ff.). Mit diesem Modell kann grob beschrieben werden, dass durch die Ergreifung infektionspräventiver Maßnahmen eine Überlastung des Gesundheitssystems verhindert werden kann (vgl. Heitwerth, 2020, S. 198ff.).

### 2.1.1 Exponentielles Wachstum

**1. Konstruieren**

Am Beginn der Covid-19 Epidemie wurden jeden Tag stark steigende Zahlen von Neuinfizierten gemeldet. Das Wachstum schien mit jedem Tag noch schneller zu gehen. Es stellte sich die Frage, wie sich dieses Wachstum am Anfang einer Epidemie verhält und ob bzw. wann mit einer Überlastung des Gesundheitssystems zu rechnen ist.

Wir nehmen zunächst an, dass jede infizierte Person pro Tag eine bestimmte Anzahl an weiteren Personen ansteckt. Als Beobachtungszeitraum legen wir den Zeitraum zwischen 26. Februar und 15. März 2020 fest, also die Zeit vor dem 1. Lockdown in Österreich, in der sich der Virus am schnellsten ausbreiten konnte. Die Zahl der Infizierten am jeweiligen Tag entnehmen wir dem Datensatz der AGES (2020). Um abzuschätzen, ab wann das Gesundheitssystem überlastet ist, können wir abschätzen, welcher Anteil aller Infizierten intensivmedizinisch behandelt werden muss und wie viele Betten auf Österreichs Intensivstationen für diese zur Verfügung stehen. Das Robert-Koch-Institut (RKI 2021) schätzt, dass etwa 10% aller Fälle hospitalisiert werden und dass von diesen wiederum 14%

intensivmedizinische Betreuung benötigen. Die AGES veröffentlicht seit Anfang April 2020 die Zahl der für Covid-19-Patienten verfügbaren und belegten Betten auf österreichischen Intensivstationen. Nach diesen Daten standen Anfang April 2020 in etwa 1000 Intensivbetten zur Verfügung (AGES 2021).

**2. Strukturieren/Mathematisieren**

Diese Annahmen führen zunächst zu einer rekursiven Darstellung für die Infizierten von einem Tag auf den nächsten Tag in einem diskreten Zeitschritt $\Delta t$ mit $t + 1 \coloneqq t + \Delta t$

$$I_{t+1} = I_t + \ k \cdot I_t,$$

wobei $I_t$ die Anzahl der Infizierten am Tag $t$ und $k > 0$ die Anzahl bzw. der Bruchteil an Personen ist, die ein Infizierter pro Tag ansteckt. Mittels Induktion lässt sich folgende explizite Darstellung für $I_t$ angeben:

$$I_t = (1 + k)^t \cdot I_0$$

Ein analoges Modell ergibt die Annahme, dass der momentane Zuwachs $\frac{dI}{dt}$ an Infizierten proportional ist zur Anzahl der Infizierten. Dies führt zur gewöhnlichen Differenzialgleichung 1. Ordnung.

$$\frac{dI}{dt} = \alpha \cdot I(t)$$

Wobei $\alpha > 0$ die konstante Wachstumsrate ist. Mit dem Anfangswert $I(0) = I_0$, lautet die eindeutige Lösung dazu:

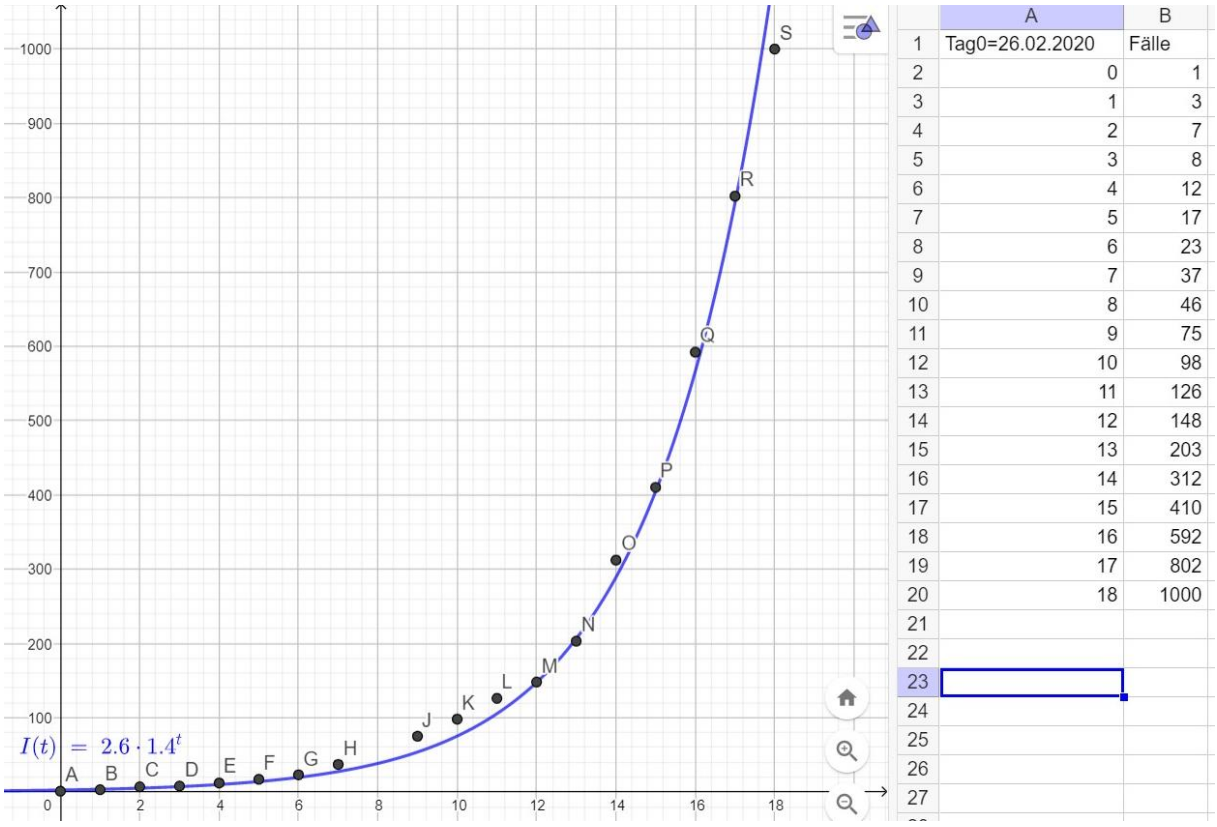
$$I(t) = e^{\alpha t} \cdot I_0$$

Setzt man $k \coloneqq e^{\alpha} - 1$, wird klar, dass das stetige Modell eine Erweiterung des diskreten Modells darstellt. Wir ersetzen $e^{\alpha}$ mit $a > 1$ zur besseren Lesbarkeit und erhalten als Modellfunktion:

$$I(t) = I_0 \cdot a^t$$

**3. Experimentieren/ Operieren/ Darstellen**

Nun wollen wir aus der Modellgleichung eine Einschätzung gewinnen, wie schnell sich die Infektion ausbreitet. Um eine Prognose erstellen zu können, muss der Parameter $k$ aus den Vorhandenen daten ermittelt werden.



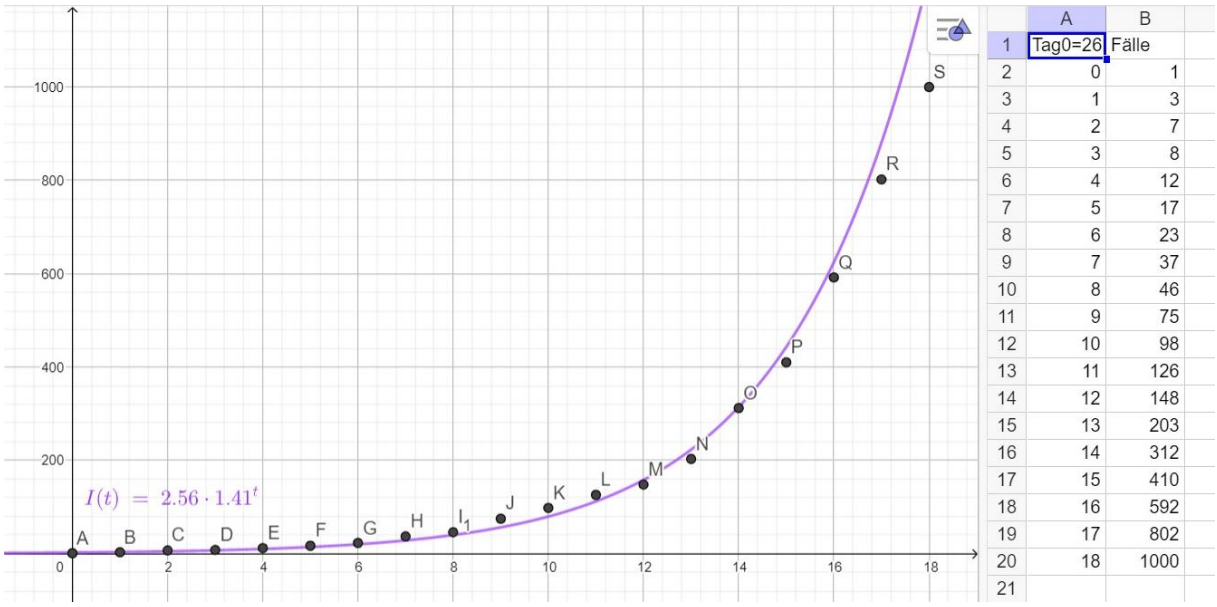

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | Tag0=26.02.2020 | Fälle |
| 2 | 0 | 1 |
| 3 | 1 | 3 |
| 4 | 2 | 7 |
| 5 | 3 | 8 |
| 6 | 4 | 12 |
| 7 | 5 | 17 |
| 8 | 6 | 23 |
| 9 | 7 | 37 |
| 10 | 8 | 46 |
| 11 | 9 | 75 |
| 12 | 10 | 98 |
| 13 | 11 | 126 |
| 14 | 12 | 148 |
| 15 | 13 | 203 |
| 16 | 14 | 312 |
| 17 | 15 | 410 |
| 18 | 16 | 592 |
| 19 | 17 | 802 |
| 20 | 18 | 1000 |
| 21 | | |
| 22 | | |
| 23 | | |
| 24 | | |
| 25 | | |
| 26 | | |
| 27 | | |

*Abbildung 2.1.1.1 Exponentielles Wachstum, Parameter durch Experimentieren ermittelt*

Als ersten Schritt könnte man die Infizierten pro Tag als Datenpunkte in ein Diagramm einzeichnen und dann versuchen die freien Parameter $a$ und $I_0$ so zu wählen, dass die Modellfunktion möglichst gut zu den Daten passt.

Durch spielerisches Variieren der Parameter in GeoGebra sehen wir, dass sich die Daten bei $I_0 = 2.6$ und $a = 1.4$ tatsächlich einigermaßen gut mit dem Modell des exponentiellen Wachstums beschreiben lassen. Das spielerische Wählen von Parametern kann gerade dann nützlich sein, wenn noch unbekannt ist, ob der Typ der Modellfunktion überhaupt für eine Beschreibung der Daten geeignet ist. Mittels Regression (Befehl TrendExp2) kann schließlich die Exponentialfunktion gefunden werden, die den Daten am besten entspricht. Dazu werden beide Seiten der Modellgleichung $I(t) = I_0 \cdot a^t$ logarithmiert. Die Modellierung mithilfe der Exponentialfunktion geht damit in folgendes lineares Modell über:

$$\ln\big(I(t)\big) = \ln(I_0) + \ln(a) \cdot t$$




| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | Tag0=26 | Fälle |
| 2 | 0 | 1 |
| 3 | 1 | 3 |
| 4 | 2 | 7 |
| 5 | 3 | 8 |
| 6 | 4 | 12 |
| 7 | 5 | 17 |
| 8 | 6 | 23 |
| 9 | 7 | 37 |
| 10 | 8 | 46 |
| 11 | 9 | 75 |
| 12 | 10 | 98 |
| 13 | 11 | 126 |
| 14 | 12 | 148 |
| 15 | 13 | 203 |
| 16 | 14 | 312 |
| 17 | 15 | 410 |
| 18 | 16 | 592 |
| 19 | 17 | 802 |
| 20 | 18 | 1000 |
| 21 | | |

*Abbildung 2.1.1.2 Exponentielles Wachstum der Infizierten, Parameter mit Regression bestimmt*

Die Parameter dieser Gleichung $\ln(I_0)$ und $\ln(a)$ werden mittels linearer Regression ermittelt. Aus diesen können dann $I_0$ und $a$ für die ursprüngliche Modellgleichung berechnet werden.

Gerundet auf zwei Dezimalstellen erhält man so $I(t) = 2.56 \cdot 1.41^t$ als Funktion für die Anzahl der Infizierten zum Zeitpunkt $t$. Die Verdopplungszeit beträgt hier circa 2 Tage, da $1.41 \approx \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ und somit ist $I(t) = 2.56 \cdot 2^{\frac{t}{2}}$.

Um zu ermitteln, ab wann die Kapazitätsgrenze des Gesundheitssystems bei ungebremstem exponentiellem Wachstum überschritten wird, lösen wir folgende Gleichung:

$$0{,}1 \cdot 0{,}14 \cdot I(t) = 1000 \Leftrightarrow t \approx 30$$

### 4. Interpretation und Modellkritik

Dieses Resultat bedeutet, dass nach dem Modell des ungebremsten exponentiellen Wachstumes ab 27. März ($t = 30$ Tage nach dem 26. Februar) mit einer Überlastung des Gesundheitssystems zu rechnen ist, da ab hier mit über 1000 Covid-19-Patienten zu rechnen ist, die intensivmedizinisch betreut werden müssen.

Doch wie valide ist dieses Resultat? Beim Vergleich des Graphen der Modellfunktion $I$ mit den Daten (Abbildung 2.1.1.2) fällt auf, dass die Modellfunktion zu Beginn sehr nahe an den tatsächlichen Werten liegt, sich aber mit fortlaufender Zeit immer weiter davon entfernt. Da wir für die Regression das Modell logarithmiert haben, sollte man allerdings eine Darstellung der Funktion mit logarithmischer Skala verwenden (Abbildung 2.1.1.3).

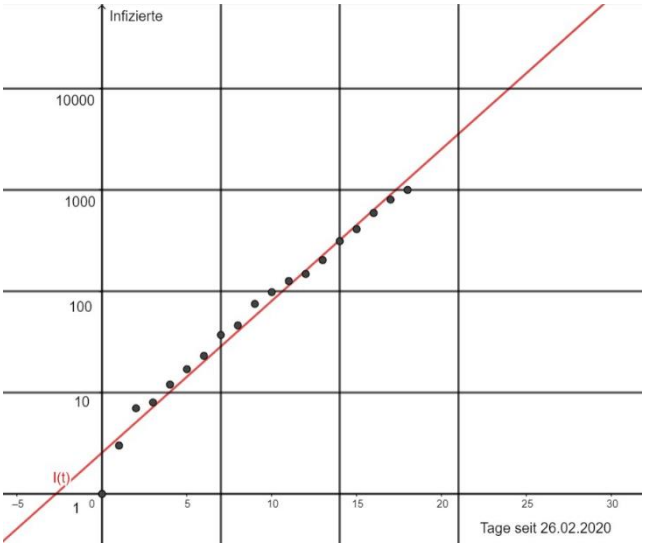



*Abbildung 2.1.1.3: Modellfunktion I auf Logarithmischer Skala*

Es fällt auf, dass die Funktion $I$ in logarithmischer Darstellung besser zu den Daten passt. Der Korrelationskoeffizient $r = 0{,}99$ weist hier auf einen deutlichen positiven linearen Zusammenhang hin.

Ein erster Einwand, den man an das Modell stellen könnte, ist, dass eine infizierte Person nicht unendlich lang ansteckend bleibt. Irgendwann wird sie wieder gesund oder – im schlimmsten Fall - stirbt sie an der Krankheit.

Ein weiteres Problem des Modells des exponentiellen Wachstums ist, dass es nur für begrenzte Zeitabschnitte der Covid-19-Pandemie zutrifft. Das exponentielle Wachstum kann nicht endlos weitergehen. Die Modellfunktion würde sehr bald schon Infektionszahlen vorhersagen, die über die Größe der Population hinausgehen. Irgendwann müssen die Infektionszahlen zurückgehen, da die Anzahl derer, die in einer Gesellschaft noch angesteckt werden können, sinkt. Ein Modell zur Vorhersage des Höhepunktes der Pandemie muss diesen Umstand auf jeden Fall berücksichtigen.

Der Wiener Mathematiker Erich Neuwirth (2021) konnte in seiner Analyse des Infektionsgeschehens mehrere Abschnitte mit exponentiellem Wachstum bzw. exponentieller Abnahme ausmachen. Dabei stellt er auf logarithmischer Skala den Verlauf der über 7-Tage gemittelten Tagesinzidenz dar (Abbildung 2.1.1.4). Phasen exponentiellen Wachstums bzw. exponentieller Abnahme treten im Verlauf der Pandemie immer wieder auf. Daher eignet sich das Modell des exponentiellen Wachstums bzw. der exponentiellen Abnahme zumindest für kurze Zeitabschnitte zur Beschreibung der Ausbreitung von Sars-Cov-2.

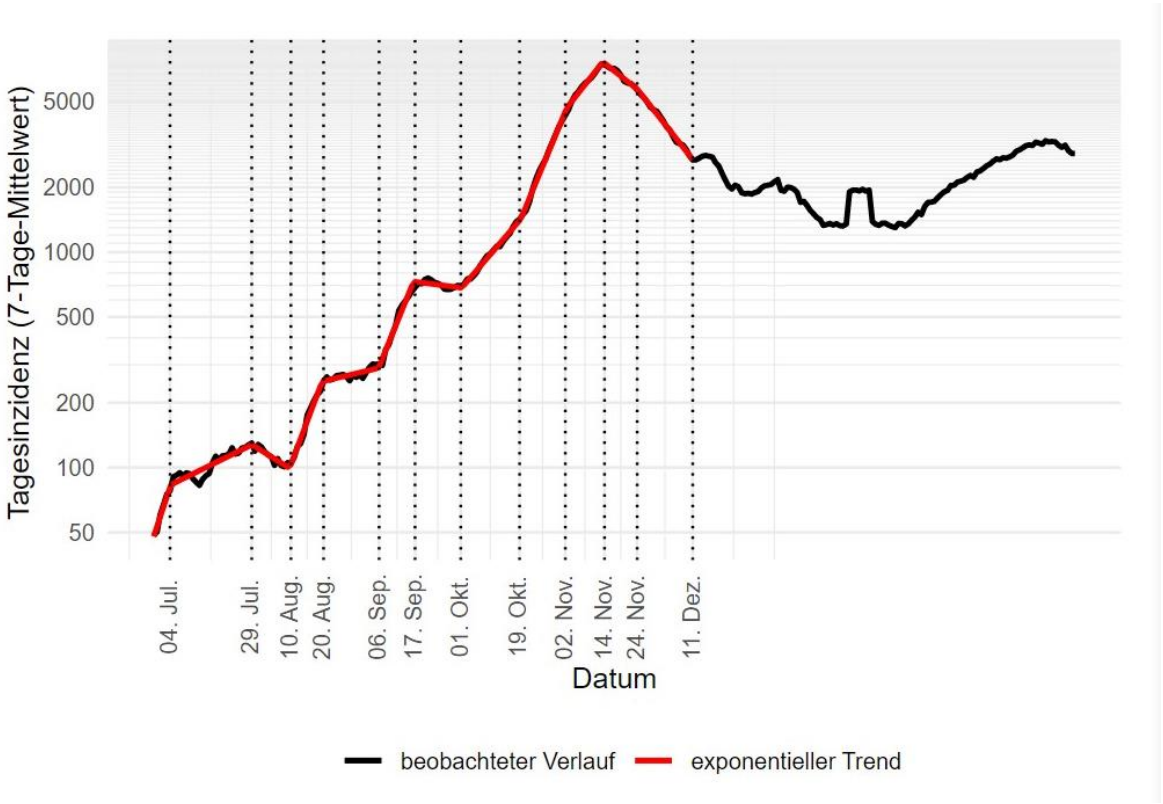



*Abbildung 2.1.1.4 Verlauf der gemittelten Tagesinzidenz mit Phasenweise exponentiellen Trends (Neuwirth, 2021)*

### 2.1.2 Exponentielle Veränderung der inzidenten Fälle in Abhängigkeit von der effektiven Reproduktionszahl

**1. Konstruieren**

Neuwirth (2021) verwendet für seine Analyse im Unterschied zu unserem ersten Modell die Anzahl der Neuinfizierten am Tag $t$. Das ist sinnvoll, da so nur aktuell ansteckende Personen im Modell berücksichtigt werden. Wir gehen erneut davon aus, dass eine Infizierte Person, während sie ansteckend ist, eine bestimmte Anzahl von weiteren Personen ansteckt. Diese Zahl ist die Reproduktionszahl (RKI, 2021). Die Basisreproduktionszahl $R_0$ gibt dabei an wie viele Folgefälle durchschnittlich durch eine infizierte Person entstehen, wenn noch niemand in der Bevölkerung immun ist und keine infektionspräventiven Maßnahmen ergriffen wurden (RKI, 2021). Wird die Reproduktionszahl durch verschiedene Maßnahmen beeinflusst und der immunisierte Teil der Bevölkerung berücksichtigt, spricht man von der effektiven Reproduktionszahl $R_{eff}$ (RKI, 2021). Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Zeit zwischen Fall und Folgefall (=Generationszeit) konstant vier Tage beträgt.[8]

**2. Strukturieren/Mathematisieren**

Um die Reproduktionszahl aus den vorhandenen Daten zu berechnen, betrachten wir die Zahl der Neuinfektionen $E_t$ am Tag $t$. Wegen der Annahme einer konstanten Generationszeit von vier Tagen, resultieren die Neuinfektionen $E_t$ am Tag $t$ aus den vier Tage zuvor Neuinfizierten $E_{t-4}$. Die effektive Reproduktionszahl zum Zeitpunkt $t$ ergibt sich damit durch folgende Formel (vgl. RKI, 2020, S. 2):

$$R_t = \frac{E_t}{E_{t-4}}$$

Da jedoch die Zahlen der Neuinfektionen stark schwanken, kann man die effektive Reproduktionszahl am Tag $t$ auch als Quotient zweier gleitender Mittel über sieben Tage angeben (RKI, 2020, S. 3):

$$R_{t,7} = \frac{\frac{1}{7}\sum_{s=t-6}^{t} E_s}{\frac{1}{7}\sum_{s=t-6}^{t} E_{s-4}}$$

[8] Diese Zeitspanne wird auch als Generationszeit bezeichnet und wird vom Robert Koch Institut (RKI) auf vier Tage geschätzt (2020, S. 1).

Die effektive Reproduktionszahl am Tag $t$ bezieht sich daher auf die Neuinfektionen im Intervall der letzten zehn Tage. Im Unterschied zu unserem Ansatz, bereitet das RKI die Zeitreihen der gemeldeten Neuinfektionen noch mit weiteren statistischen Methoden auf (RKI, 2020, S.1).

Ist $R_{t,7}$ für eine bestimmte Zeit lang annähernd konstant, so kann die Zahl der Neuinfektionen $E_{t+\tau}$ nach $\tau$ Tagen wie folgt berechnet werden. Die effektive Reproduktionszahl ist der Faktor, mit dem sich die Zahl der Neuinfizierten $E_t$ innerhalb von vier Tagen verändert.

$$E_{t+\tau} = E_t \cdot \left(R_{t,7}\right)^{\frac{\tau}{4}}$$

Ist $R_{eff}$ für einen bestimmten Zeitraum konstant, so wächst die Zahl der Neuinfektionen exponentiell falls $R_{eff} = R_{t,7} > 1$. Ist $R_{eff} = R_{t,7} < 1$, so nimmt sie exponentiell ab.

### 3. Experimentieren/Operieren/Darstellen

Mit einem Tabellenkalkulationsprogramm lässt sich die effektive Reproduktionszahl sehr einfach aus den vorhandenen Daten (AGES, TU Graz, 2020) und der obigen Formel berechnen und in einem Diagramm darstellen. Die AGES (2021) berechnet und veröffentlicht die effektive Reproduktionszahl für Österreich nach einer wesentlich komplexeren Methode als der oben beschriebenen (Richter, Schmid & Stadlober, 2020).

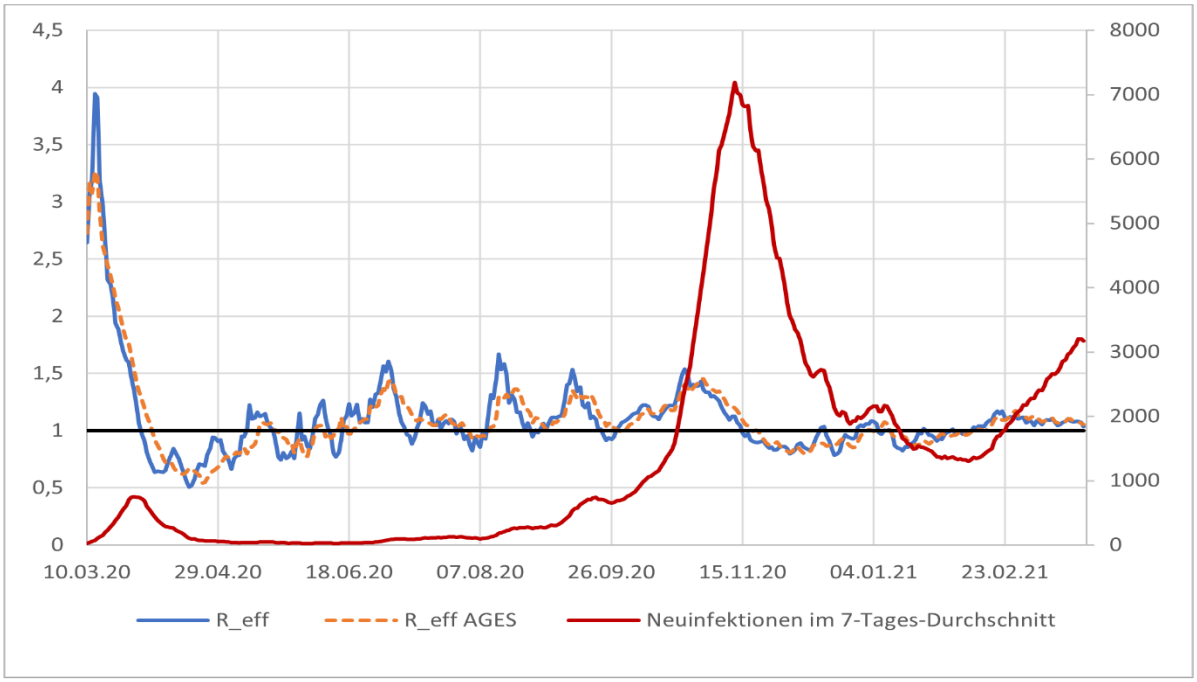



*Abbildung 2.1.2.1 Die effektive Reproduktionszahl berechnet nach der hier beschriebenen Modellierung (blau) bzw. nach Berechnung der AGES (2021) (orange). Die Zahl der Neuinfektionen im 7-Tages-Durchschnitt steigt bei $R_{eff} > 1$ und sinkt bei $R_{eff} < 1$*

Anhand der Grafik (2.1.2.1) kann man erkennen, dass die effektive Reproduktionszahl nach unserer Modellierung in etwa jener der AGES entspricht. Die von der AGES modellierte Reproduktionszahl ist allerdings um etwa zwei Tage verzögert und weniger sprunghaft.

Anhand der Reproduktionszahl können nun Prognosen über $E_t$ gemacht werden. Zum Beispiel kann der Grafik (Abbildung 2.1.2.1) entnommen werden, dass die effektive Reproduktionszahl $R_{eff}$ in den zwei Monaten zwischen 18.06.2020 und 17.08.2020 zumeist über 1 liegt. Im Durchschnitt ist $R_{eff} \approx 1{,}157$ in diesem Zeitraum.

Prognostiziert man nun mit $E_{t+\tau} = E_t \cdot \left(R_{eff}\right)^{\frac{\tau}{4}}$ mit $t = 0$ am 17.08.2020, so stellt sich die Situation wie folgt dar (Abbildung 2.1.2.2).

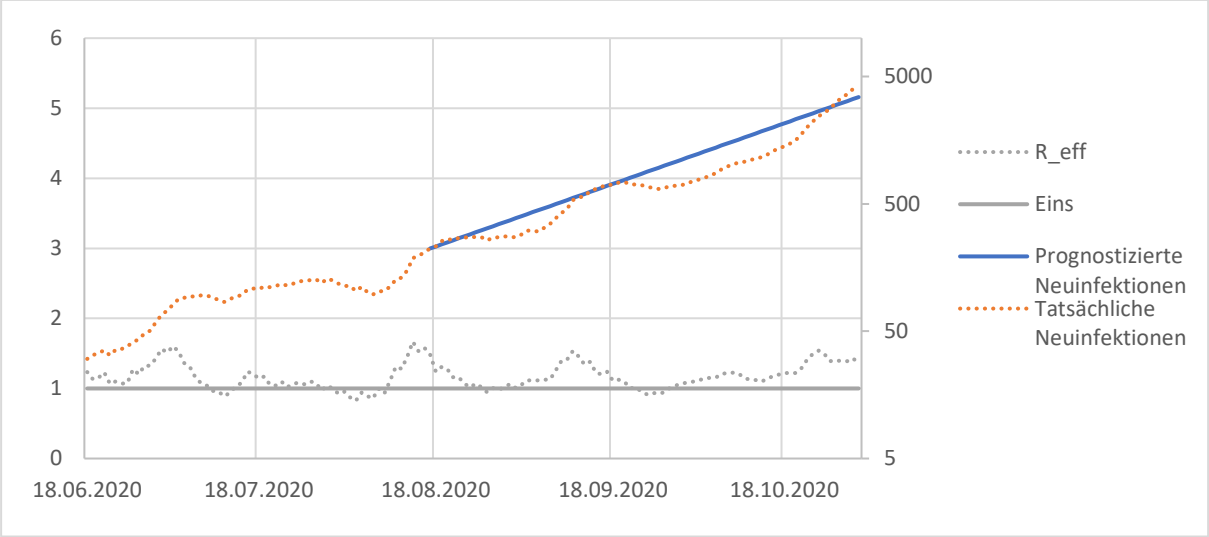



*Abbildung 2.1.2.2 Prognose der Neuinfektionen mit $R_{eff}$ von 17.08. bis 31.10.2020 auf Grundlage einer durchschnittlichen effektiven Reproduktionszahl $R_{eff} \approx 1{,}157$ in der vorhergehenden Zeit zwischen 18.08. und 17.08.2020.*

### 4. Interpretieren/Modellkritik

Die Modellierung der effektiven Reproduktionszahl $R_{eff}$ zeigt, die Wirksamkeit der Maßnahmen, die zu Beginn der Pandemie gesetzt wurden. $R_{eff}$ fällt sehr schnell unter 1. In weiterer Folge beginnt etwa Mitte Juni 2020 mit $R_{eff} > 1$ ein exponentielles Wachstum der Neuinfizierten. Die Annahme einer konstanten effektiven Reproduktionszahl $R_{eff} \approx 1{,}57$ für den Zeitraum zwischen 17.08.2020 und 31.10.2020 liefert eine ziemlich gute Prognose für die Neuinfizierten (Abbildung 2.1.2.2).

Der Vorteil der Betrachtung der Neuinfizierten anstelle der Gesamtzahl aller Infizierten liegt vor allem darin, dass nur Ansteckende Personen zum Infektionsgeschehen beitragen. Die

effektive Reproduktionszahl $R_{eff}$ verändert sich mit der Zeit, da sie von den getroffenen Maßnahmen und dem Anteil, der noch nicht immunisierten Bevölkerung abhängt. Für einzelne Zeitabschnitte kann aber von einem konstanten $R_{eff}$ ausgegangen werden, sodass mithilfe von $R_{eff}$ die Zahl der Neuinfizierten prognostiziert werden kann.

Dabei wird aber vernachlässigt, dass sich $R_{eff}$ auch mit dem Anteil, der noch nicht immunisierten Bevölkerung verändert. Außerdem kann sich die Reproduktionszahl auch in Zeiten, in denen es keine Änderungen der infektionspräventiven Maßnahmen gibt durch andere Umstände - wie etwa ansteckendere Virusvarianten oder geringere werdende Beachtung der Kontaktbeschränkungen und Hygienemaßnahmen der Bevölkerung – verändern.

Ein konstante effektive Reproduktionszahl über eine lange Zeit führt zum gleichen Widerspruch wie das erste Modell von 2.1.1.. Die Zahl der Neuinfektionen würde über alle Grenzen hinweg weiter ansteigen. Der nächste Modellierungsversuch sollte daher berücksichtigen, dass mit der Bevölkerungsgröße eine obere Schranke für die Ausbreitung einer Infektionskrankheit gegeben ist.

### 2.1.3 Logistisches Wachstum

**1. Konstruieren**

Das Modell des logistischen Wachstums geht davon aus, dass eine Population nicht unbegrenzt wachsen kann. Zu Beginn kann eine neu-infizierte Person noch alle ihre weiteren Kontakte mit der Krankheit anstecken. Ist aber ein Anteil der Bevölkerung bereits infiziert, so kann eine Person diesen Anteil ihrer Kontakte nicht mehr anstecken. Irgendwann wird also das exponentielle Wachstum sich verlangsamen, da es nicht mehr genügend Personen gibt, die noch nicht mit dem Virus infiziert sind und angesteckt werden können.

Um zu untersuchen, wie viele Personen gleichzeitig infiziert sind, und die Belastung des Gesundheitssystems zu ermitteln nehmen wir an, dass eine infizierte Person im Durchschnitt 15 Tage lang mit Sars-Cov-2 infiziert ist. Diese Zeitspanne schätzen wir aus den Daten der AGES (2021). Plottet man die kumulierten Fälle $I$ und die Summe der Genesenen und Verstorbenen gegen die Zeit, kann man beobachten, dass die Kurve der Genesenen und Verstorbenen der Kurve der kumulierten Fälle $I$ mit etwa 15 Tagen Verzögerung folgt (Abbildung 2.1.3.1).

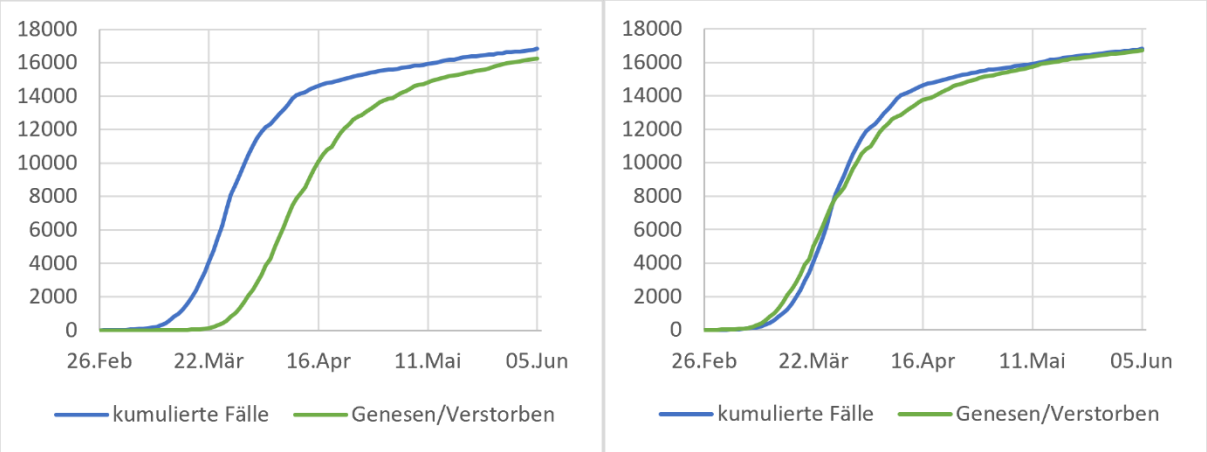



*Abbildung 2.1.3.1 Die Kurve der Genesenen und Verstorbenen (grün) entspricht in etwa der der Infizierten (blau) mit einer Verzögerung von τ=15 Tagen. Links wurden zum Vergleich die Daten der Genesenen und Verstorbenen 15 Tage früher aufgetragen.*

Wie vorhin gehen wir davon aus, dass etwa 1,4% aller inzidenten Fälle eine intensivmedizinische Betreuung benötigen und für diese in Österreich etwa 1000 Intensivbetten bereit stehen. Als Beobachtungszeitraum dient die Zeit der Beginn der ersten Infektionswelle von 26. Februar bis zum 15. März 2020. Die Gesamtbevölkerung Österreichs wird im Datensatz der AGES (2021) mit rund 8900000 Personen angegeben.

### 2. Strukturieren/Mathematisieren

Wir bezeichnen mit $I(t)$ wieder die Gesamtanzahl der inzidenten Fälle zum Zeitpunkt $t$ und mit $N$ die Größe der Gesamtbevölkerung. Nimmt man an, dass die Infizierten gleichmäßig in der Bevölkerung verteilt sind, dann ist bereits ein Anteil von $\frac{I(t)}{N}$ der möglichen Kontakte einer infizierten Person selbst infiziert und damit nicht mehr ansteckbar. Damit können nur $1 - \frac{I(t)}{N}$ der Kontakte angesteckt werden. Die momentane Veränderung der Infizierten mit der Zeit $\frac{dI}{dt}$ ist also nicht nur proportional zur Zahl der Infizierten $I(t)$ zum Zeitpunkt $t$, sondern auch zum Anteil derer, die noch angesteckt werden können $1 - \frac{I(t)}{N}$.

Somit erhalten wir die folgende gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$\frac{dI}{dt} = a \cdot I(t) \cdot \left(1 - \frac{I(t)}{N}\right) \quad (1)$$

Dabei gibt der Parameter $a$ die Ansteckungsrate an, wie schnell sich die Krankheit im Verhältnis zu den Infizierten und denen, die noch angesteckt werden können, in der Bevölkerung ausbreitet.

Dieses Modell könnte auch als diskretes Modell als eine Differenzengleichung formuliert werden. Ein Nachteil der diskreten Modellierung ist aber jener, dass keine exakte, explizite Lösung angegeben werden kann (vgl. Ableitinger, 2010, S. 39).[9]

Die Differentialgleichung (1) kann nach der Wahl von $I(0) = I_0$ als Anfangswert durch Trennen der Variablen gelöst werden. Wir erhalten folgende Funktion zur Modellierung des logistischen Wachstums:

$$I(t) = \frac{N}{1 + \left(\frac{N}{I_0} - 1\right) e^{-aNt}}$$

### 3. Experimentieren/ Operieren/ Darstellen

Erneut geht es nun darum, die freien Parameter $a$ und $I_0$ der Modellgleichung so zu wählen, dass sie zu den Daten passen. Zunächst soll versucht werden die Funktion $I$ für ein Szenario zu modellieren, in dem keine Maßnahmen zur Eindämmung der Epidemie getroffen werden.

[9] Die diskrete Form des Modells des logistischen Wachstums wird auch Verhulst-Gleichung genannt (Ableitinger, 2010, S. 43).

Zur Kalibrierung des Modells verwenden wir die Daten bis zum 15. März 2020. Diese Daten sind aus der Zeit vor dem ersten Lockdown.

Dazu sind die Parameter $a$ sowie $I_0$, also die am Tag $t = 0$ Infizierten, zu schätzen. Da zum Ende des Beobachtungszeitraumes erst $1000$ Personen infiziert sind, ist $1 - \frac{I}{N} \approx 1$. Unsere eingangs formulierte Differentialgleichung (1) vereinfacht sich daher zu $\frac{dI}{dt} = a \cdot I$. Am Anfang steigt also auch in diesem Modell die Anzahl der inzidenten Fälle exponentiell und es können die gleichen Parameter $a = 0{,}34$ und $I_0 = 2{,}56$ wie zuvor verwendet werden.

Im weiteren Verlauf nimmt die Steigung wieder ab und die Kurve erreicht einen Wendepunkt und steigt langsam bis die gesamte Bevölkerung $N$ durchseucht ist. Da die Änderungsrate der Infizierten $\frac{dI}{dt} = a \cdot I(1 - \frac{I}{N})$ eine quadratische Funktion der Infizierten mit Nullstellen bei $I = 0$ und $I = N$ darstellt, liegt der Wendepunkt von $I$, in dem die Zunahme der Infizierten am stärksten ist, bei $I(t_w) = N/2$. Aufgelöst nach $t_w$ erhält man

$$t_w = \frac{\ln\left(\frac{N}{I_0} - 1\right)}{a} \approx 44.3\ Tage. \qquad (2)$$

Ohne Maßnahmen wäre nach diesem Modell also bereits rund um den 10. April 2020 der steilste Anstieg von Infizierten erreicht gewesen. Das hätte auch bedeutet, dass bis dahin bereits die Hälfte österreichischen Bevölkerung infiziert gewesen wären.

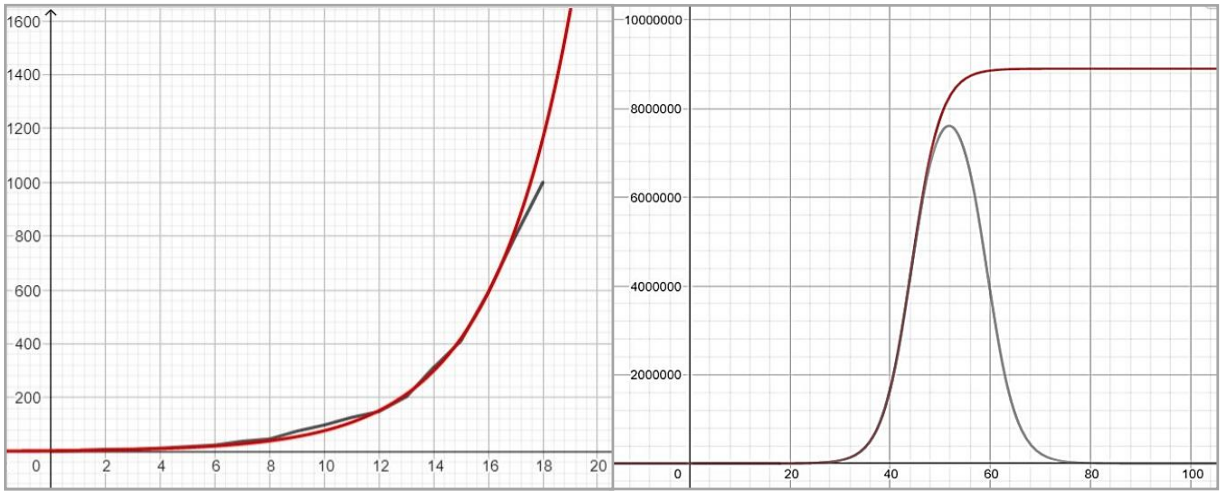



*Abbildung 2.1.3.2 Bestätigte Infektionen (schwarz) t Tage nach dem 26.02.2020 und angepasste logistische Modellfunktion I (rot). Rechts: Prognostizierte Infektionen (kumuliert) in Millionen t Tage nach dem 26.02.2020 (rot) und die Anzahl der am Tag t gleichzeitig Infizierten (grau).*

Geht man also davon aus, dass eine angesteckte Person im Durchschnitt 15 Tage lang als infiziert gilt (= mittlere Dauer der Infektiosität), dann kann mit $A(t) := I(t) - I(t - 15)$ die

Zahl der am Tag $t$ aktiv infizierten Personen $A(t)$ angegeben werden (Abbildung 2.1.3.2). Am Graphen lässt sich erkennen, dass der Höhepunkt von $A$ bei etwas mehr als 50 Tagen und einer Zahl von über sieben Millionen gleichzeitig infizierten Personen liegt.

Maßnahmen, wie der Lockdown, das Tragen von Mund-Nasen-Schutz oder etwa das Händewaschen können im Modell durch das Verringern der Übertragungsrate $a$ modelliert werden (Abbildung 2.1.3.4). Aus (2) geht hervor, dass $t_w$ größer wird, wenn man $a$ verringert. Das bedeutet der Wendepunkt von $I(t)$ tritt erst später ein. Zum Zeitpunkt $t_w + \frac{15}{2}$ hat die Funktion $A$ ihr Maximum (Lemma 1). Durch das Verringern von $a$ tritt damit auch der Zeitpunkt, an dem die meisten Personen aktiv infiziert sind, später ein. Außerdem sind zu diesem Zeitpunkt auch weniger Personen gleichzeitig angesteckt (Lemma 1). Über den gesamten Verlauf bleibt die Gesamtzahl aller Infizierten gleich.

Durch das Lösen folgender Gleichung nach $a$, kann berechnet werden, wie sehr $a$ verkleinert werden muss, damit die Kapazität von 1000 Intensivpflegebetten für Covid-19-Patienten am Höhepunkt der Epidemie nicht überschritten wird.

$$0.014 \cdot A\left(t_w + \frac{15}{2}\right) = 1000$$

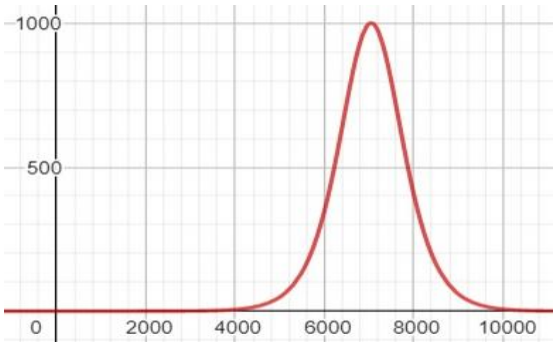



*Abbildung 2.1.3.3 Patienten in Intensivpflege am Tag t ab 26.02.2020 bei a≈0.00214*

Diese Gleichung kann von den CAS GeoGebra und Mathematica[10] nicht gelöst werden. Vereinfacht man die Gleichung, so kann schließlich die Lösung $a \approx 0.00214$ einem der CAS bestimmt werden (Lemma 2). Um ein Vielfaches einfacher ist es, $a$ per Schieberegler zu variieren, bis der Graph der Funktion $0.014 \cdot A$ flach genug ist.(Abbildung 2.1.3.3).

Für $a = 0{,}00214$ liegt das Maximum von $A(t)$ bei $t = \frac{\ln\left(\frac{N}{I_0}-1\right)}{a} + \frac{15}{2} \approx 7000$ Tagen nach dem 26.02.2020.

[10] https://www.wolfram.com/mathematica/

## 4. Interpretation und Modellkritik

Wenn $1{,}4\%$ aller Infizierten intensivmedizinisch behandelt werden müssten, dann bedeutet das, dass in einem Szenario ohne Maßnahmen Mitte April 2020 mehr als 100.000 Personen gleichzeitig intensivmedizinische Pflege benötigt hätten. Dabei wäre die Kapazität von 1000 Intensivpflegebetten um das 100-Fache überschritten.

Durch eine Verminderung der Übertragungsrate $a$ würde die Epidemie ihren Höhepunkt erst später erreichen. Es würden weniger Personen zugleich aufgrund einer Infektion mit dem Coronavirus auf die Intensivstation kommen (Abbildung 2.1.3.4). Dabei fällt auf, dass dadurch die Epidemie sehr weit in die Länge gezogen wird. Fast zwanzig Jahre ( bzw. 7000 Tage) würde es dauern, wenn man die Zahl der Intensivpatienten, die gleichzeitig versorgt werden müssen, unter dem angenommenen Wert von 1000 verfügbaren Betten halten möchte (Abbildung 2.1.3.3). Das wäre aber auch Zeit genug, um die Kapazität in den Krankenhäusern auszubauen oder eine Impfung zu entwickeln.

Das Modell des logistischen Wachstums wurde zu Beginn der Pandemie in den Medien unter dem Hashtag #flattenthecurve verwendet, um das Abflachen der Kurve der Infizierten durch diverse Maßnahmen zu beschreiben (vgl. Elschenbroich, 2020 und Heitwerth, 2020). Auch wenn diese Dynamik durch das Modell des logistischen Wachstums beschrieben wird, wird vernachlässigt, dass Infizierte nach einer gewissen Zeit nicht mehr ansteckend sind. Im derzeitigen Modell würden die zu Beginn Infizierten auch nach hunderten Tagen noch weitere Personen anstecken. Das Modell macht Aussagen über Zeitpunkte, die weit jenseits der durchschnittlichen Dauer der Infektiosität liegen. Daher sollte der Umstand, dass Infizierte nach einer bestimmten Zeit nicht mehr ansteckend sind, unbedingt berücksichtigt werden.

Darüber hinaus ist zu beachten, dass die Personen, die in der Statistik am Tag $t$ als Neuinfizierte hinzukommen, ab diesem Zeitpunkt eigentlich schon in Quarantäne sind und die Krankheit ab diesem Zeitpunkt nicht mehr verbreiten können. Zudem ist von einer gewissen Dunkelziffer an Infizierten auszugehen.

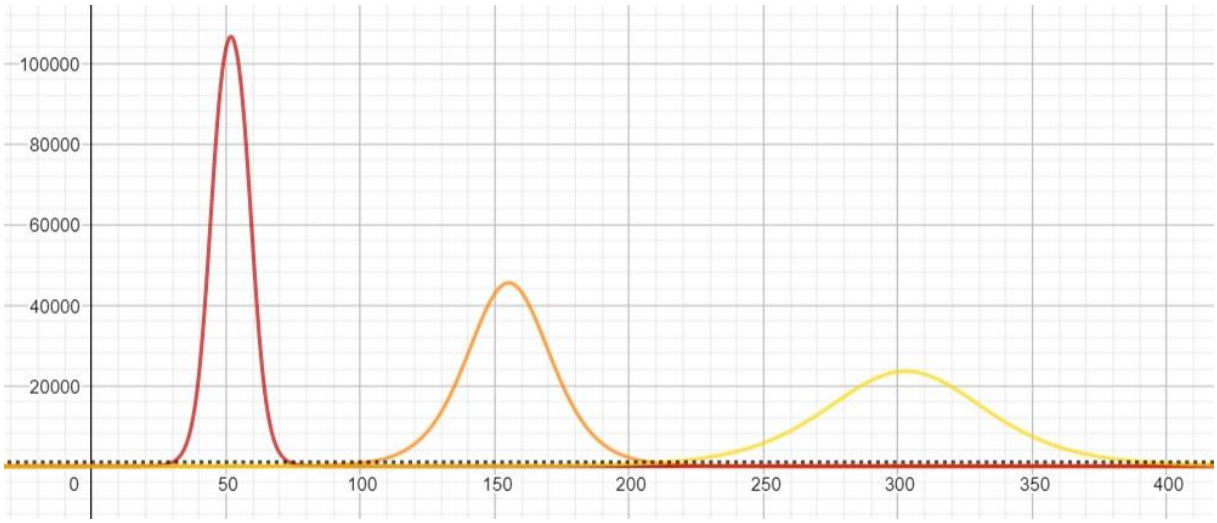



*Abbildung 2.1.3.4 Prognostizierte Covid-19-Patienten auf Intensivstation t Tage nach dem 26.02.2020: ohne Maßnahmen - rot, Verringerung von a um 70% - orange und Verringerung von a um 85% -gelb. Strichliert: Kapazität von 1000 für Covid-19-Patienten verfügbare Intensivpflegeeinheiten.*

## 2.2 SIR – Modellierung

Der Nachteil der Modellierung der Ausbreitung von Covid-19-Fällen mit dem Modell des logistischen Wachstums ist, dass diejenigen, die nach einer Infektion nicht mehr ansteckend sind nicht berücksichtigt werden. Im Modell des logistischen Wachstums ist die gesamte Bevölkerung in zwei Klassen eingeteilt. Diejenigen, die bereits positiv auf Sars-Cov-2 getestet sind und damit als infiziert gelten und jene, die noch nicht infiziert sind.

Berücksichtigt man bei der Modellierung zusätzlich die Gruppe derer, die nach einer Infektion nicht mehr ansteckend, dafür aber immun oder im schlimmsten Fall verstorben sind, so erhält man ein sogenanntes Susceptiple-Infectious-Removed (SIR) Modell (vgl. Murray, 1993, S. 611). William O. Kermack und Anderson G. McKendrick (1927) waren die ersten, die ein solches Modell formuliert und angewandt haben. Sie modellierten die Übergänge von Individuen zwischen einzelnen Gruppen (auch Kompartimente genannt) mit deterministischen Differentialgleichungen. Alternativ werden auch stochastische Differentialgleichungen eingesetzt, um neben deterministischen Einflüssen auch zufällige Störfaktoren zu berücksichtigen (Simha, Ventkatesha Prasad & Narayana 2020). Stochastische und deterministische SIR-Modelle gehen von einer homogen durchmischten Bevölkerung aus. Neuere Ansätze wie etwa Netzwerk- oder Agentenbasierte SIR-Modelle, berücksichtigen auch die unterschiedliche Anzahl an Kontakten einzelner Personen bzw. das unterschiedliche Verhalten einzelner Individuen (Chang et al, 2020 bzw. Wang, Xiong, Yang, Peng, & Xu, 2010). Ein weiterer Vorteil ist, dass sich SIR-Modelle einfach erweitert lassen. So können beispielsweise weitere Gruppen, wie etwa die der asymptomatisch Infizierten (Peirlinck et al, 2020) oder Personen in Quarantäne (Sarkar, Khajanchi & Nieto, 2020) berücksichtigt werden. Außerdem können SIR-Modelle auch dahingehend erweitert werden, dass sie eine bestimmte Inkubationszeit (Ndaïrou, Area, Nieto & Torres, 2020), die räumliche Ausbreitung der Infektionswelle (Murray, 1993, S. 666ff.) oder Immunisierungen durch Impfung (Hethcote, 1980, 135ff.) abbilden.




*Abbildung 2.2.1 SIR Modelle berücksichtigen drei Gruppen: die Empfänglichen (=susceptible), die Ansteckenden (infectious) und die Entfernten (removed). Empfängliche Individuen gehen zunächst durch Ansteckung über in die Gruppe der Ansteckenden. Ansteckende genesen oder sterben und gelangen so in die Gruppe der Entfernten.*

In diesem Abschnitt werden in zwei Versuchen die Übergänge zwischen den einzelnen Gruppen der Empfänglichen $S$, der Ansteckenden $I$ und den Entfernten $R$ mittels deterministischer Differentialgleichungen modelliert. In beiden SIR-Modellen definieren wir diese Gruppen wie folgt:

| | | |
|---|---|---|
| $S$ | Empfängliche (engl. susceptible) | Diese Personen sind noch nicht angesteckt und können sich durch Kontakt mit einem Angesteckten infizieren. |
| $I$ | Ansteckende (engl. infectious) | Diese Personen sind infiziert und können Empfängliche anstecken. Ansteckende werden nach einer bestimmten Zeit geheilt oder sterben und gehen so in die Gruppe der Entfernten übergehen. |
| $R$ | Entfernte (engl. removed) | Diese Personen sind nicht mehr ansteckend, und entweder immun oder verstorben. Wir nehmen an, dass bei Covid-19 die Immunität so lange andauert, sodass ein möglicher Wechsel zurück in die Gruppe der Empfänglichen vernachlässigt wird. |

*Tabelle 2.2.1 Definition der Gruppen im SIR Modell*

Der erste Ansatz (2.2.1.), der eventuell intuitiv naheliegender scheint, geht davon aus, dass Personen nach einer durchschnittlichen Verweildauer in der Gruppe der Ansteckenden geheilt werden (oder sterben) und damit in die Gruppe der Entfernten wechseln. Durch die Zeitverschiebung erhält man retardierte Differentialgleichungen. Es werden mehrere Versuche unternommen, um das Modell unter der Annahme eines Zeitverzögerten Übergangs von den ansteckenden zu den entfernten Individuen zu erstellen. So soll veranschaulicht werden, wie Fehler oder Unachtsamkeiten in der Mathematisierung der Modellannahmen zu fehlerhaften bzw. in sich widersprüchlichen Modellierungen führen können.

Modellierungen mit Zeitverzögerung kommen zwar in der Infektionsepidemiologie vor (Scheiner, Ukaj & Hellmich, 2020), aber das klassische SIR-Modell von Kermack und McKendrick (1927) und darauf aufbauende erweiterte Modelle verwenden einen anderen Ansatz, um den Übergang von den Ansteckenden $I$ zu den Entfernten $R$ zu beschreiben. Hier wird angenommen, dass pro Zeiteinheit ein Bruchteil der Ansteckenden in die Gruppe der Entfernten übergeht. Dieser Ansatz wird in einer zweiten Modellierung (2.2.2.) umgesetzt.

### 2.2.1 SIR – Modell mit retardierten Differenzialgleichungen

**1. Konstruieren**

Wir gehen davon aus, dass eine ansteckende Person im Durchschnitt nach einer konstanten Zahl $\tau$ Tagen wieder gesund wird oder stirbt und damit in das Kompartiment der Entfernten $R$ übergeht. Der Übergang von den empfänglichen zu den ansteckenden Individuen modellieren wir analog wie bisher, nämlich so, dass die Zahl derer die neu angesteckt werden proportional zu den ansteckenden Personen $I$ und dem Anteil der noch empfänglichen Bevölkerung $\frac{S}{N}$ ist. Zusätzlich gehen wir von einer konstanten Bevölkerung $N$ aus und vernachlässigen damit Geburten, Migration und natürliche Todesfälle.

Aus dem Datensatz der AGES (2021) können die Größe der Gruppen $S$, $I$ und $R$ bestimmt werden. Die Zahl der Entfernten $R(t)$ ist die Summe, der am Tag $t$ nach dem 26. Februar 2020 als geheilt oder verstorben Aufgelisteten. Die Zahl der Ansteckenden $I(t)$ berechnet sich aus der Anzahl der kumulierten Fälle am Tag $t$ abzüglich der aufsummierten Geheilten und Toten. Die Anzahl der Empfänglichen $S(t)$ ergibt sich aus $S(t) = N - I(t) - R(t)$ beziehungsweise als die Gesamtbevölkerung abzüglich der kumulierten Fälle.

Die Dauer $\tau$, die eine infizierte Person ansteckend ist, kann wie in 2.1.3 beschrieben aus den Daten der AGES (2021) mit $\tau = 15$ geschätzt werden (Abbildung 2.2.1.1). Als Übertragungsrate verwenden wir wie zuvor $a = 0.34$. Wir modellieren zunächst ein Szenario ohne Maßnahmen basierend auf den Daten von 26. Februar 2020 bis 15. März 2020.

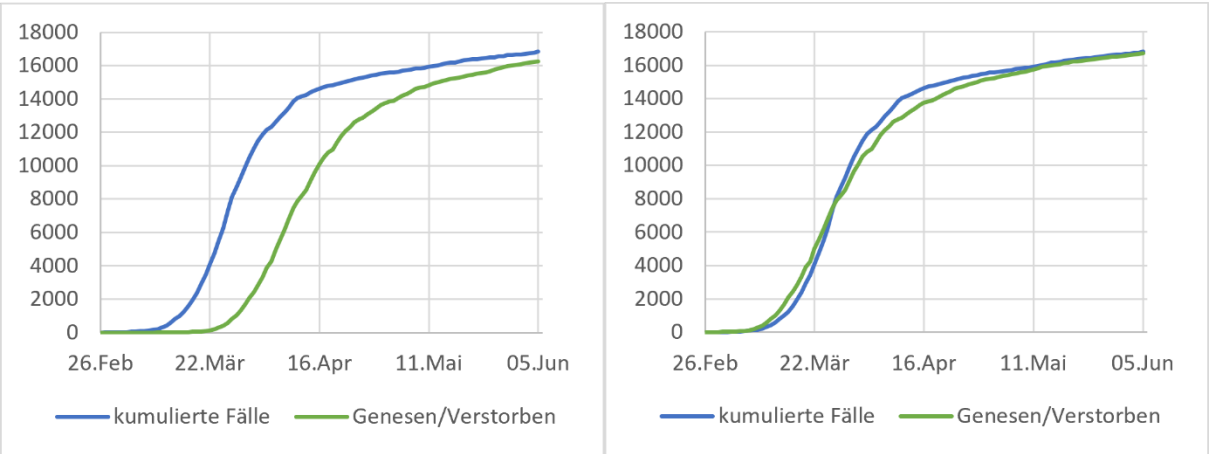



*Abbildung 2.2.1.1 Die Kurve der Entfernten entspricht in etwa der der Infizierten mit einer Verzögerung von τ=15 Tagen. Links wurden zum Vergleich die Daten der Entfernten 15 Tage früher aufgetragen.*

## 2. Erster Mathematisierungsversuch

Für die Veränderung der Empfänglichen $\frac{dS}{dt}$ kann die folgende Gleichung angegeben werden:

$$\frac{dS}{dt} = -a \cdot I(t) \cdot \frac{S(t)}{N} \tag{1}$$

Dabei ist $a > 0$ die konstante Übertragungsrate und $N$ die konstante Bevölkerungsgröße.

Der Ausdruck $a \cdot I(t) \cdot \frac{S(t)}{N}$ stellt gleichzeitig den momentanen Zuwachs der Ansteckenden zum Zeitpunkt $t$ dar. Mit jedem Zeitschritt gehen von den Ansteckenden aber diejenigen, die bereits $\tau$ Tage ansteckend waren, über in die Gruppe der Entfernten $R(t)$ zum Zeitpunkt $t$. Als ersten Versuch modellieren wir die Änderungsraten $I'(t)$ und $R'(t)$ als retardierte Differenzialgleichungen:

$$\frac{dI}{dt} = a \cdot I(t) \cdot \frac{S(t)}{N} - I(t-\tau) \tag{2}$$

$$\frac{dR}{dt} = I(t-\tau) \tag{3}$$

Das bedeutet, dass zum Zeitpunkt $t$ alle, die $\tau = 15$ Tage zuvor ansteckend waren in die Gruppe der Entfernten übergehen.

Da das System von retardierten Differentialgleichungen (1) bis (3) sich nicht einfach analytisch lösen lässt, schreiben wir es in ein System von Differenzengleichungen mit einem diskreten Zeitschritt $\Delta t$ mit $t + 1 \coloneqq t + \Delta t$ um:

$$S_{t+1} = S_t - a^* \cdot I_t \cdot \frac{S_t}{N}$$

$$I_{t+1} = I_t + a^* \cdot I_t \cdot \frac{S_t}{N} - I_{t-\tau} \tag{4}$$

$$R_{t+1} = R_t + I_{t-\tau}$$

Durch das Diskretisieren des Modells muss auch die Übertragungsrate $a$ angepasst werden, da diese einem stetigen Modell entspricht. Zunächst ist noch niemand in der Gruppe der Entfernten und es sind noch fast alle empfänglich. Also $R(t) \approx 0$ und $\frac{S(t)}{N} \approx 1$ bei sehr kleinem $t$. Daher vermehren sich die Ansteckenden auch in diesem Modell zu Beginn exponentiell. Für das diskrete exponentielle Wachstum haben wir in 2.1.1 die Wachstumsrate $a^* = 0{,}41$ ermittelt, die wir auch als Ausgangswert für diese Modellierung verwenden.

### 3. Experimentieren/ Operieren/ Darstellen

Das rekursive Modell (4) lässt sich sehr einfach in Excel implementieren, da der Zeitschritt von einem Tag genau dem Abstand zwischen den gemeldeten Daten entspricht. Die ersten Datenpunkte für den Zeitraum von 26.02.2020 bis 15.03.2020 stammen aus dem Datensatz der AGES (2021). Die weiteren Werte werden dann mit dem rekursiven Modell (4) simuliert.

Plottet man die Kurven für $S_t, I_t$ und $R_t$ kann man zwar zunächst den erwarteten Verlauf beobachten (Abbildung 2.2.1.2). Die Empfänglichen $S$ werden immer weniger, während die Ansteckenden $I$ zunächst steigen und nach einem Hochpunkt wieder zurückgehen. Jedoch fällt die Anzahl der ansteckenden Personen $I$ schließlich unter 0, die Empfänglichen $S$ steigen wieder an und die Zahl der Entfernten $R$ wächst über die Gesamtzahl der Bevölkerung $N$ hinaus (Abbildung 2.2.1.2). Die Beträge von $S_t$ und $I_t$ werden schließlich so groß, dass sie ab $t = 79$ von Excel nicht mehr berechnet werden können.

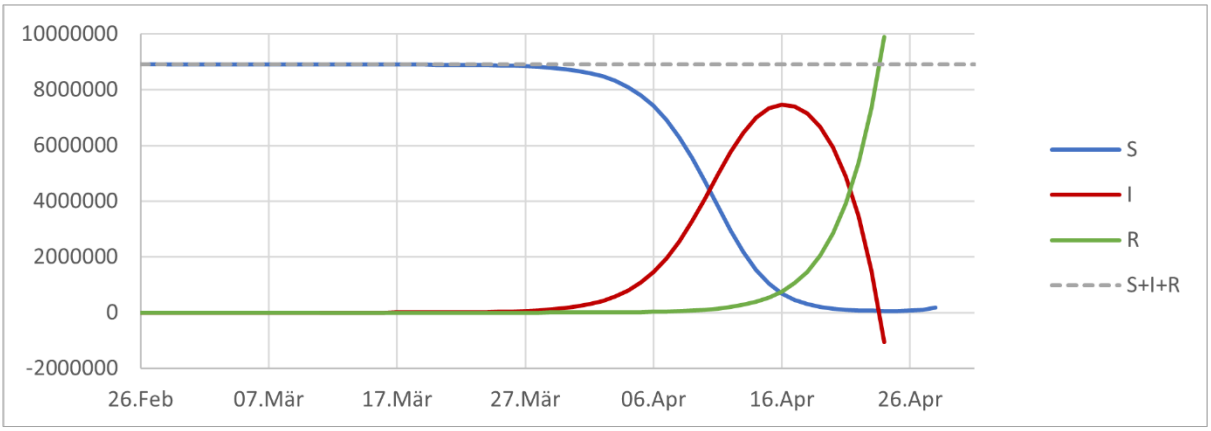



*Abbildung 2.2.1.2 Modell (4) führt zu unrealistischen Resultaten.*

### 4. Interpretation und Modellkritik

Diese mathematischen Resultate ergeben übertragen auf die Realsituation keinen Sinn. Es kann keine negative Anzahl an Ansteckenden geben. Außerdem haben wir angenommen, dass jemand, der einmal gesundet ist, seine Immunität nicht mehr verlieren kann. Zusammen mit der Annahme einer konstanten Gesamtbevölkerung $N = S + I + R$ steht auch der Anstieg der Empfänglichen im Widerspruch zum Realmodell. Darüber hinaus ist der Anstieg der Entfernten $R$ über $N$ hinaus ein Widerspruch.

Offensichtlich ist hier beim Mathematisieren ein Fehler unterlaufen. Nicht alle die am Tag $t$ infiziert sind, gesunden genau $15$ Tage später, sondern nur die, die tatsächlich an diesem Tag

angesteckt wurden. Damit wird ein erneuter Durchlauf des Modellierungsprozesses ab dem Schritt des Mathematisierens notwendig.

### 5. Zweiter Mathematisierungsversuch

Im vorigen Schritt wurde der Ausdruck des Übergangs von den Ansteckenden $I_t$ zu den Entfernten $R_t$ zu groß gewählt. Die, die am Tag $t$ ansteckend sind werden nicht alle genau $\tau = 15$ Tage später entfernt, sondern im Verlauf von 15 Tagen. Damit können wir versuchen das Modell (4) zu reparieren, den Ausdruck für den Übergang von $I_t$ nach $R_t$ zusätzlich durch $\tau = 15$ dividieren. Durch den zweiten Mathematisierungsversuch entsteht folgendes rekursive Modell:

$$S_{t+1} = S_t - a \cdot I_t \cdot \frac{S_t}{N}$$

$$I_{t+1} = I_t + a \cdot I_t \cdot \frac{S_t}{N} - \frac{I_{t-\tau}}{\tau} \qquad (5)$$

$$R_{t+1} = R_t + \frac{I_{t-\tau}}{\tau},$$

wobei $a = 0{,}41$ und $\tau = 15$.

### 6. Experimentieren/ Operieren/ Darstellen

Das Modell (5) wird analog zu vorhin in Excel implementiert und geplottet (Abbildung 2.2.1.3). Wie vorhin zeigen die Kurven nur für die erste Zeit den erwarteten Verlauf. Nach dem Ersten Maximum zeigen die Kurven und der Ansteckenden $I_t$ und der Entfernten $I_t$ ein oszillierendes Verhalten, das mit zunehmender Zeit abklingt.

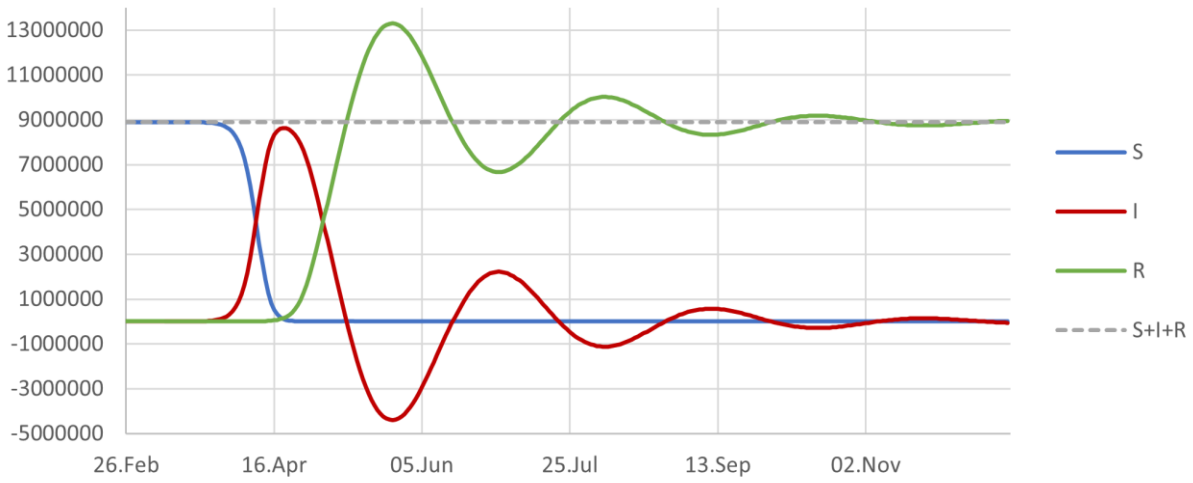



*Abbildung 2.2.1.3 Auch das SIR-Modell (5) führt zu widersprüchlichen Resultaten und muss verworfen werden.*

## 7. Interpretation und Modellkritik

Erneut widersprechen die mathematischen Resultate der Realität. Modell (5) führt zu einer negativen Zahl von Ansteckenden und einer über die Gesamtbevölkerung hinausgehenden Anzahl der Entfernten. Insofern ist mit Modell (5) durch die Modifizierung von Modell (4) keine Verbesserung gelungen. Der Ausdruck, der den Übergang von $I$ nach $R$ am Tag $t$ beschreibt, ist zumindest phasenweise immer noch zu groß, sodass $I_t$ negative Werte für einige Zeitpunkte $t$ annimmt. Daher muss eine erneute Mathematisierung durchgeführt werden.

## 8. Dritter Mathematisierungsversuch

Korrekterweise muss die Annahme, dass Individuen $\tau = 15$ Tage in der Gruppe der Ansteckenden $I$ verbringen, bevor sie in die der Entfernten $R$ übergehen. So verstanden werden, dass am Tag $t$ der Zuwachs der Ansteckenden $I$ vom Tag $t - \tau$ von den Ansteckenden $I$ abgezogen wird und zu den Entfernten $R$ addiert wird. Damit sieht das mathematische Modell wie folgt aus.

$$S_{t+1} = S_t - a \cdot I_t \cdot \frac{S_t}{N}$$

$$I_{t+1} = I_t + a \cdot I_t \cdot \frac{S_t}{N} - a \cdot I_{(t-\tau)} \cdot \frac{S_{(t-\tau)}}{N} \tag{6}$$

$$R_{t+1} = R_t + a \cdot I_{(t-\tau)} \cdot \frac{S_{(t-\tau)}}{N}$$

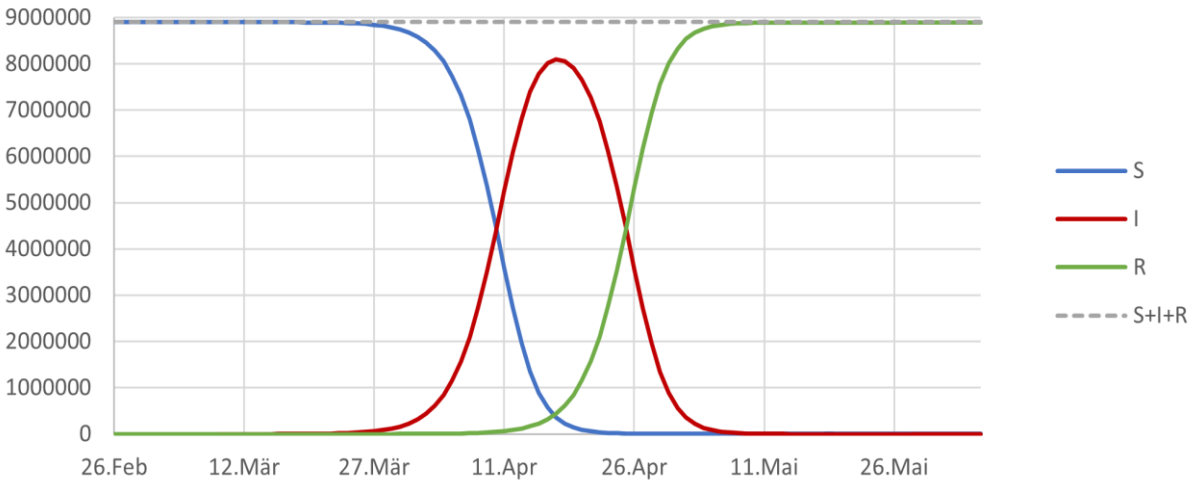



*Abbildung 2.2.1.4 SIR-Modell (6) mit retardierten Differenzengleichungen.*

### 9. Experimentieren/ Operieren/ Darstellen

Wir implementieren Modell (6) erneut in Excel mit Schrittweite $\Delta t := 1$ Tag und plotten die Kurvenverläufe für $S_t, I_t$ und $R_t$. Ein erster Blick auf die geplotteten Kurven des Modells zeigt, dass das Modell dieses Mal die gewünschten Eigenschaften hat (Abbildung 2.1.1.4). $S_t$ fällt streng monoton, $I_t$ wächst bis zu einem Höhepunkt, bevor es dann wieder – zumindest dem Anschein nach - gegen 0 fällt und $R_t$ steigt streng monoton an.

Sieht man jedoch genauer hin, so fällt auf, dass $I_t$ für $t \leq 82$ wieder negative Werte annimmt (Abbildung 2.2.1.5) [11]. Wählt man für $a$ einen geringeren Wert (z.B.: $a = 0.3$), dann bleibt $I_t$ größer $0$. Der logarithmische Plot zeigt jedoch, dass die Anzahl der Infizierten $I_t$ ab einem bestimmten Zeitpunkt nach dem Höhepunkt nicht mehr nennenswert zurückgeht (Abbildung 2.2.1.5). Experimentiert man weiter mit der Größe der Ansteckungsrate $a$ und nimmt den Extremfall $a = 0$ - d.h. es wird niemand mehr angesteckt – an, dann ist:

$$I_{t+1} = I_t + a\left(I_t \cdot \frac{S_t}{N} - I_{t-\tau} \cdot \frac{S_{t-\tau}}{N}\right) = 0$$

Das bedeutet, dass die Zahl der Ansteckenden $I_t$, sich nicht mehr ändert.

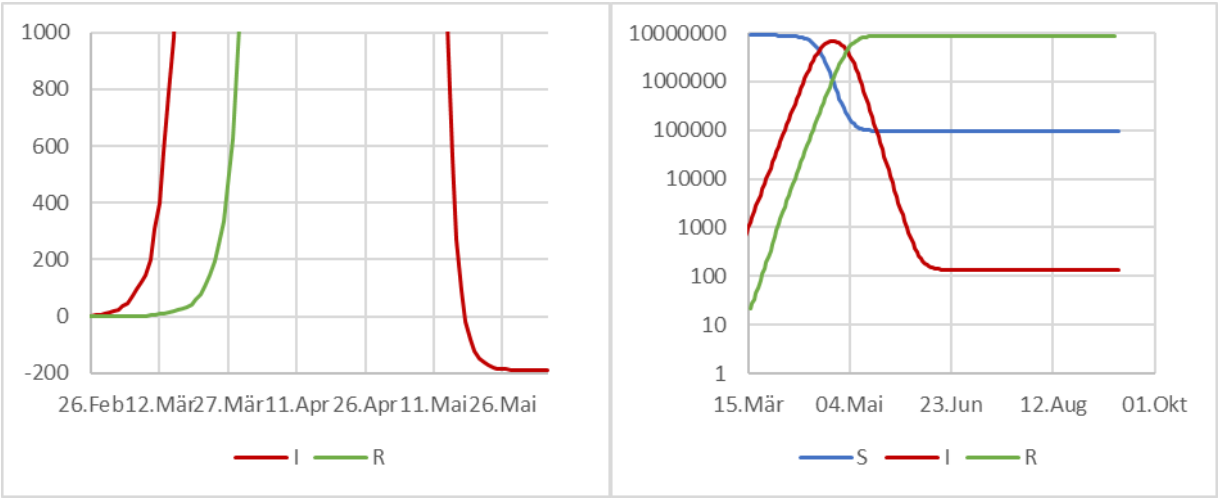



*Abbildung 2.2.1.5* ***Links****: Für* a=0,41 *ergeben sich negative Werte für die Infizierten.* ***Rechts****: Die logarithmische darstellung zeigt, dass ab einer gewissen Zeit die Zahl der Infizierten nicht mehr zurückgeht.*

[11] Dieser Fehler ist auch nicht auf die sehr grobe Diskretisierung zurückzuführen, da auch eine numerische Lösung des stetigen Modells in Mathematica zu vergleichbaren Resultaten führt (siehe Anhang).

## 10. Interpretation und Modellkritik

Auch wenn diese Modellierung (6) wesentlich besser als die beiden vorgegangenen Versuche ist, so bleiben dennoch einige Schwachstellen. Es kann bei einem ungeeigneten Parameter $a$ zu einer negativen Anzahl von Ansteckenden $I_t$ kommen. Noch ungünstiger ist der Umstand, dass wenn im Fall von $a = 0$ es auch zu keinen weiteren Genesungen mehr kommt.

Alternativ zur Annahme eines zeitverzögerten Übergangs, kann eine konstante Übergangsrate für den Übergang von den Ansteckenden $I_t$ zu den Entfernten $R_t$ zu definiert werden, die nicht von der Ansteckungsrate abhängig ist. Im folgenden Abschnitt wird uns diese Überlegung zum klassischen SIR – Modell von Kermack und McKendrick (1927) führen, auf deren Ansatz auch aktuelle SIR-Modellierungen aufbauen (vgl. u.a. Cooper, Mondal, & Antonopoulos, 2020, S. 2).

### 2.2.2 SIR – Modell von Kermack und McKendrick

*1. Konstruieren*

Erneut gehen wir von den Gruppen der Empfänglichen $S$, der Ansteckenden $I$ und der Entfernten $R$, sowie von einer konstanten Gesamtpopulation $N$ aus. Migration, Geburten und Todesfälle, die nicht durch die Krankheit selbst bedingt sind, werden also außer Acht gelassen. Im Unterschied zu vorhin, soll eine ansteckende Person nicht nach einer festen Anzahl von Tagen in die Gruppe der Entfernten $R$ übergehen. Stattdessen kann vereinfacht angenommen werden, dass zum Zeitpunkt $t$ stets eine Proportion $b$ der Ansteckenden $I(t)$ in die Gruppe der Entfernten $R(t)$ übergeht. Der Einfachheit halber nennen wir $b$ Gesundungsrate, auch wenn einige Individuen die Gruppe der Ansteckenden als Verstorbene verlassen.

Der Übergang von den Empfänglichen $S$ zu den Ansteckenden $I$ wird wie bisher modelliert. Wie auch zuvor untersuchen wir den Zeitraum der ersten 100 Tage nach dem 26. Februar 2020 und gehen davon aus, dass sich die Infektionskrankheit in der Zeit vor dem ersten Lockdown ungehindert ausbreiten konnte.

*2. Mathematisieren*

Diese Annahmen führen nun zum SIR-Modell von Kermack und McKendrick (1927):

$$\frac{dS}{dt} = -a \cdot I(t) \cdot \frac{S(t)}{N} \tag{1}$$

$$\frac{dI}{dt} = a \cdot I(t) \cdot \frac{S(t)}{N} - b \cdot I(t) \tag{2}$$

$$\frac{dR}{dt} = b \cdot I(t) \tag{3}$$

wobei $a > 0$ und $1 > b > 0$ und $t$ in Tagen nach dem 26. Februar 2020.

Die physikalische Dimension des Parameters $b$ ist $1/\text{Tage}$ . Daher kann $b$ auch als Kehrwert der Zeit, die eine Person ansteckend ist, interpretiert werden. Diese Zeitspanne $\tau$ haben wir zuvor in 2.1.3 und 2.2.1 auf 15 Tage geschätzt. Da wir davon ausgehen, dass sich die Infektionskrankheit Covid-19 bis zum 15. März 2020 bzw. $t = 18$ ungehindert ausgebreitet hat, verwenden wir die Daten von diesem Tag als Anfangswerte:

$$I(18) = 982 \tag{4}$$

$$R(18) = 18 \tag{5}$$

Mit der Bevölkerungsgröße $N = 8901064$ folgt

$$S(18) = N - I(18) - R(18) = 8900064 \tag{6}$$

Außerdem ist $a = 0{,}34$ und $b = \frac{1}{15}$.

### 3. *Experimentieren/ Operieren/ Darstellen*

#### a) Verhalten des Modells:

Das System autonomer Differentialgleichungen (1)-(3) lässt sich nun wesentlich einfacher analysieren. Zunächst folgt aus (1)-(3) direkt, dass $\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0$. Mit der Wahl der Startwerte $S_0 + I_0 + R_0 = N$ folgt, dass die Bevölkerungsgröße $N$ konstant ist.

Da die Entfernten $R(t)$ zum Zeitpunkt $t$ immer mit $R(t) = N - S(t) - I(t)$ angegeben werden können, können (1) und (2) im Empfänglichen–Ansteckenden Phasenraum ($SI$-Phasenraum) erste Erkenntnisse über das SIR-Modell betrachtet werden (Abbildung 2.2.2.1).

Weil die Empfänglichen $S$ und die Ansteckenden $I$ stets größer als 0 sein sollten und $S(t) + I(t) \leq N$, liegt der biologisch sinnvolle Bereich des Modelles innerhalb des Dreiecks

$$D = \{(S, I) | S \geq 0, I \geq 0, S + I \leq N\}.$$

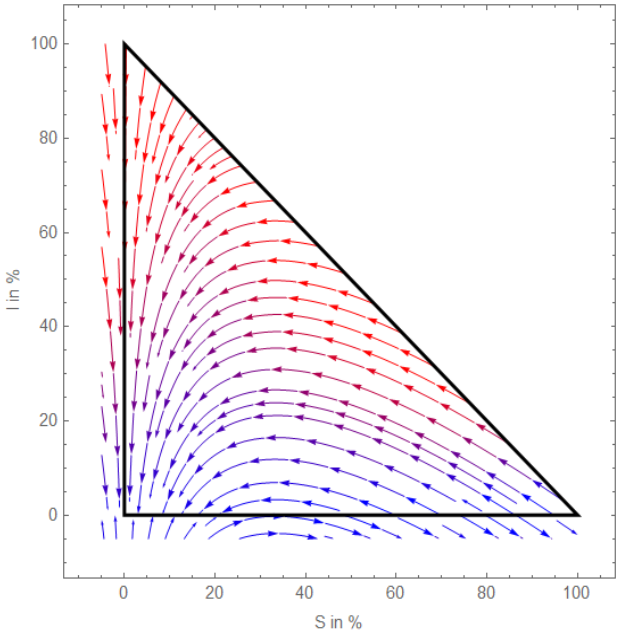



*Abbildung 2.2.2.1 SI-Phasenraumporträt des SIR-Modells mit $\frac{1}{R_0} = \frac{1}{3} \approx 33\%$. Die Farbe deutet auf die Länge des Vektors $(S', I')$ hin, wobei Blau für kürzere und Rot für längere Vektoren $(S', I')$ steht. S und I sind in Prozent angegeben. Das schwarze Dreieck stellt den biologisch sinnvollen Bereich des Modells D dar.*

Die Betrachtung des $SI$-Phasenraumporträts (Abbildung 2.2.2.1) legt nahe, dass alle Bahnen innerhalb des biologisch sinnvollen Bereichs $D$ bleiben.[12] Außerdem ist $S(t)$ streng monoton fallend. Für alle Bahnen gilt, dass $\lim_{t\to\infty} I(t) = 0$. Aus den Gleichungen (1) bis (3) kann man sofort entnehmen, dass das System stabil ist, falls niemand ansteckend ist, d.h. $I(t) = 0$. Betrachtet man Gleichung (2), so erkennt man, dass für $I(t) \neq 0$

$$\frac{dI}{dt} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0 \Leftrightarrow a \cdot \frac{S(t)}{N} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} b \Leftrightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{S(t)}{N} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 1.$$

Das bedeutet, dass die Zahl der Infizierten steigt, falls $\mathfrak{R}_{eff} := \frac{a}{b} \cdot \frac{S(t)}{N} > 1$. Da zu Beginn noch fast alle für die Krankheit empfänglich sind, d.h.: $S_0 \approx N$, kann sich die Krankheit ausbreiten falls $\mathfrak{R}_0 := \frac{a}{b} > 1$. $\mathfrak{R}_{eff}$ ist effektive Reproduktionszahl und $\mathfrak{R}_0$ Basisreproduktionszahl zu diesem Modell.

Damit haben $\mathfrak{R}_0$ und $\mathfrak{R}_{eff}$ mit den in 2.1.2 definierten Reproduktionszahlen gemeinsam, dass die Anzahl der Inzidenten Fälle $I(t)$ zum Zeitpunkt $0$ bzw. $t$ steigt falls sie $R_0 > 1$ bzw. $R_{eff} > 1$. Es ist zu beachten, dass den verschiedenen Reproduktionszahlen unterschiedliche Modellierungen zu Grunde liegen (Abbildung 2.2.2.2).

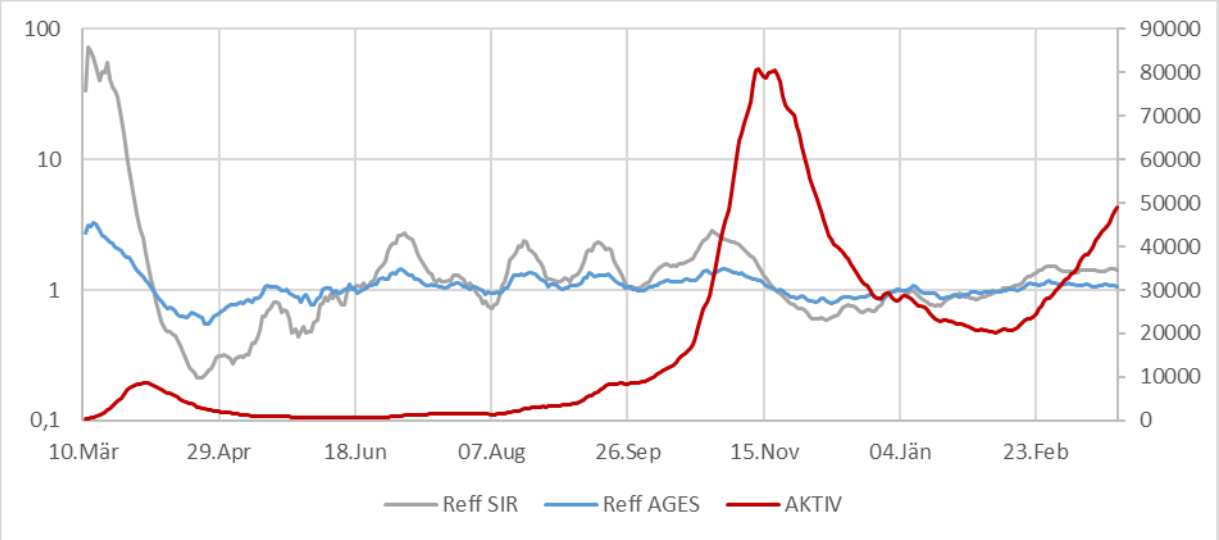



*Abbildung 2.2.2.2 Effektive Reproduktionszahl des SIR Modells (grau) im Vergleich zu der effektiven Reproduktionszahl, die von der AGES veröffentlicht (blau) wird.*

Falls also $\mathfrak{R}_0 > 1$ so steigt die Anzahl der Infizierten zunächst exponentiell, da $S \approx N$:

$$\frac{dI}{dt} \approx (a - b) \cdot I(t)$$

[12] Ein Beweis dazu findet sich z.B. bei Reinhard Schuster (2009, S. 231f.).

Die empfängliche Proportion $\frac{S(t)}{N}$ nimmt jedoch kontinuierlich ab und so wird die Vermehrung der Ansteckenden $I(t)$ eingebremst. Sobald $\frac{S(t)}{N} = \frac{b}{a} = \frac{1}{\Re_0}$, erreicht die Anzahl der Ansteckenden $I(t)$ ihren Höhepunkt (Abbildung 2.2.2.1) und fällt danach streng monoton gegen Null.

### b) Implementierung:

Das Anfangswertproblem (1) bis (6) ist nicht besonders einfach zu lösen.[13] Daher schreiben wir es - mit Hinblick auf die Behandlung im Schulunterricht - in ein System von Differenzengleichungen mit diskreten Zeitschritt $\Delta t$ mit $t + 1 := t + \Delta t$ um. In jedem Zeitschritt wird so ein kleiner Diskretisierungsfehler in Kauf genommen, der qualitative Verlauf der Kurven ändert sich jedoch nicht (vgl. Ableitinger, 2010, S. 34).

$$S_{t+1} = S_t - a \cdot I_t \cdot \frac{S_t}{N} \tag{7}$$

$$I_{t+1} = I_t + a \cdot I_t \cdot \frac{S_t}{N} - b \cdot I_t \tag{8}$$

$$R_{t+1} = R_t + b \cdot I_t \tag{9}$$

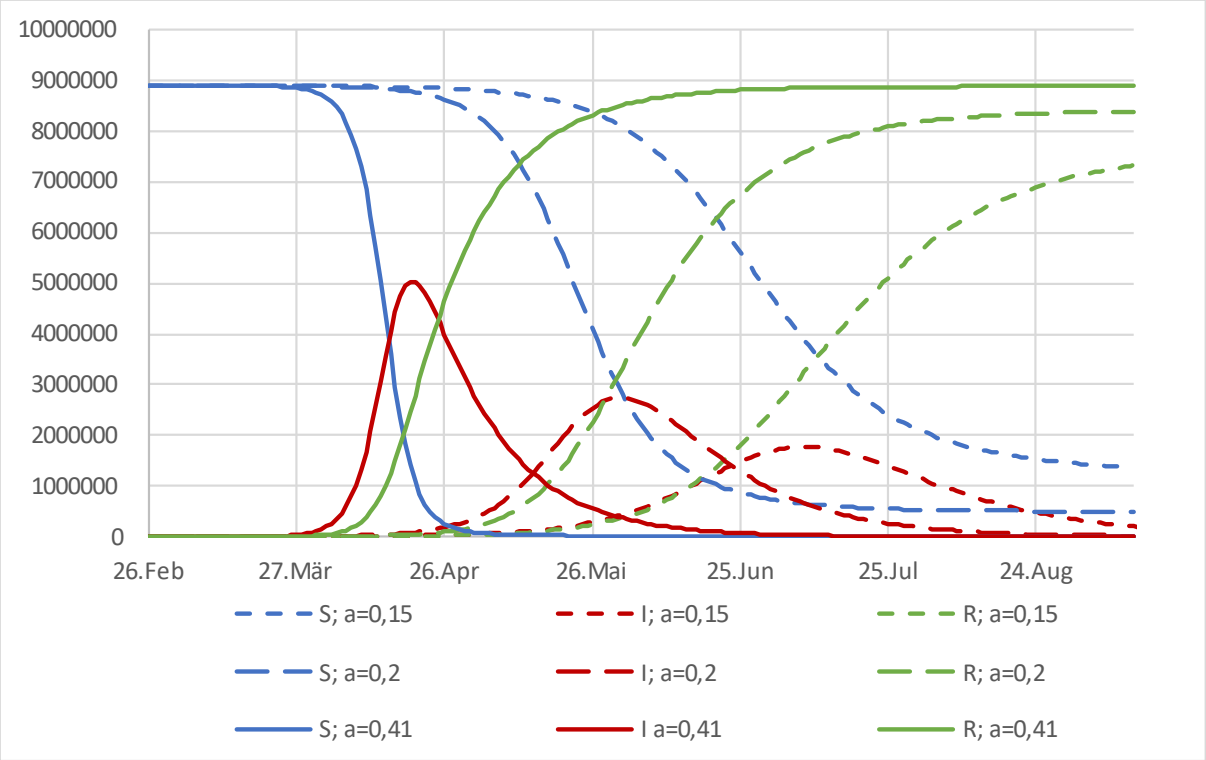



*Abbildung 2.2.2.3 SIR-Modell (7) bis (9) mit den Anfangswerten $S_{18} = 8900064, I_{18} = 982, R_{18} = 18$ und verschieden Werten für die Ansteckungsrate a.*

[13] Eine geschlossene Näherungslösung findet sich z.B. bei James D. Murray (1993, S. 614f.).

Durch das Diskretisieren muss der Parameter $a$ wie zuvor angepasst werden und wir verwenden den gerundeten Wert $a = 0{,}41$. Da wir $b = \frac{1}{15}$ bereits sehr grob geschätzt haben, übernehmen wir diesen Wert für das diskrete Modell für die Implementierung im Tabellenkalkulationsprogramm.

### c) Verringern der Ansteckungsrate $a$

Der Verlauf der Kurven der Ansteckenden $I$ lässt erkennen, dass etwa Mitte April mit dem Hochpunkt der Pandemie zu rechnen ist, an dem über fünf Millionen Personen gleichzeitig ansteckend sind. Durch Verringerung der Ansteckungsrate $a$ mittels infektionspräventiver Maßnahmen kann die Kurve der Ansteckenden $I(t)$ zum Zeitpunkt $t$ abgeflacht werden, so dass am Höhepunkt der Pandemie weniger Personen gleichzeitig erkrankt sind und damit auch weniger Personen zur gleichen Zeit intensivmedizinisch betreut werden müssen (Abbildung 2.2.2.3). Zusätzlich fällt auf, dass bei verringerter Ansteckungsrate ein Teil der Bevölkerung von der Infektionskrankheit verschont bleibt und sich bis zum Ende der Pandemie nicht ansteckt.

Kann die Ansteckungsrate $a$ so weit gesenkt werden, dass die effektive Reproduktionszahl unter den kritischen Wert von 1 fällt, so wird die Ausbreitung der Infektionskrankheit gestoppt und die Zahl der ansteckenden Personen $I_t$ geht gegen Null (Abbildung 2.2.2.4).

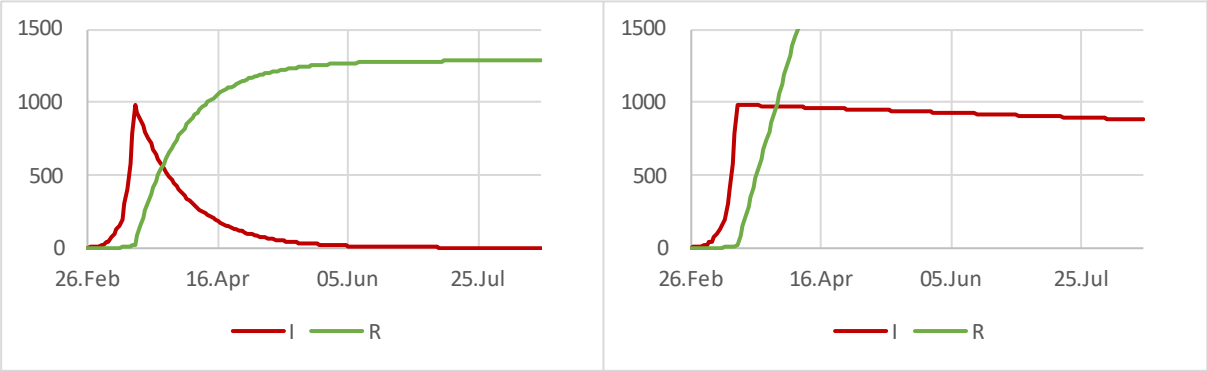



*Abbildung 2.2.2.4 Zwei Szenarien des SIR-Modells (7)-(9) mit a=0.015 und a=0.066. In beiden Fällen ist $\Re_{eff} < 1$.*

### d) Modellierung mit Variation der Ansteckungsrate $a$

Im Realen wird sich die Ansteckungsrate $a$ nicht sprunghaft ändern, sondern stetig. Die Ansteckungsrate kann daher selbst als Funktion in Abhängigkeit von der Zeit $a(t)$ modelliert werden, die von verschiedenen Faktoren wie der Stärke der Maßnahmen, der Saisonalität des Virus oder der Bereitschaft der Bevölkerung, sich an die Maßnahmen zu halten, beeinflusst wird. Wenn man die zeitliche Entwicklung der Ansteckungsrate abschätzen kann, kann man noch treffendere Aussagen über den weiteren Verlauf der Pandemie machen, als wenn man

$a$ als konstant annimmt. Aus der Modellgleichung (7) und den gemessenen Daten kann man die Ansteckungsrate $a_t$ zum Zeitpunkt $t$ bestimmen.

$$S_{t+1} = S_t - a_t \cdot \frac{I_t \cdot S_t}{N} \Leftrightarrow a_t = \frac{S_t - S_{t+1}}{I_t \cdot S_t} \cdot N$$

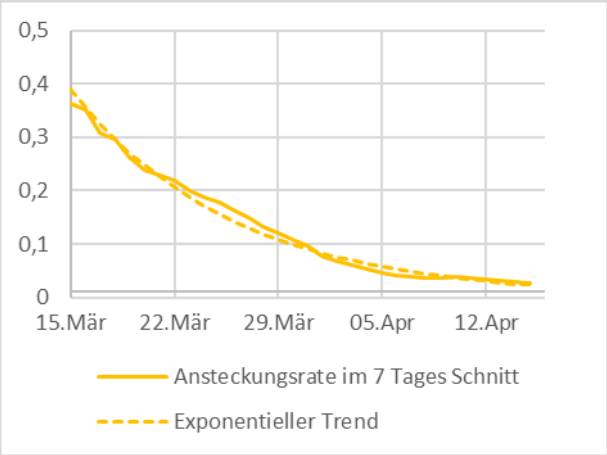



*Abbildung 2.2.2.5 Exponentielle Abnahme der Ansteckungsrate $\tilde{a}_t$ im ersten Lockdown von 15. März 2020 bis 15. April 2020.*

Durch die Verwendung einer über sieben Tage gemittelten Ansteckungsrate

$$\tilde{a}_t := \frac{1}{7} \cdot \sum_{i=t-7}^{t} a_i$$

erhält man einen stabileren Verlauf für die Ansteckungsrate. Die Folge $\tilde{a}_t$ nimmt im Zeitraum des ersten Lockdowns von 15. März 2020 bis 15. April 2020 exponentiell ab (Abbildung 2.2.2.5).

Analog dazu kann man auch den Parameter $b$ aus der Gleichung (9) ermitteln.

$$R_{t+1} = R_t + b_t \cdot I_t \Leftrightarrow b_t = \frac{R_{t+1} - R_t}{I_t}$$

Da davon ausgegangen wird, dass sich die Zeit $\tau$, in der jemand ansteckend ist, nicht verändert, kann $b = \frac{1}{\tau}$ als Durchschnittswert aller $b_i$ $(i = 1, \dots n)$ verwendet werden. Berechnet man $b$ für den Zeitraum zwischen 15. März 2020 und 25. März 2021, so erhält man $b \approx 0{,}066$ respektive $\tau \approx 15{,}15$ Tage.

Verwendet man nun im SIR-Modell (4) bis (9) anstelle der konstanten Ansteckungsrate $a$ die eben berechnete variable Ansteckungsrate $\tilde{a}_t$, so erhält man ein Resultat, das grob den von der AGES ermittelten Daten entspricht (Abbildung 2.2.2.6). Betrachtet man die Zahlen der Entfernten fällt auf, dass die Daten der AGES im Vergleich zu den Werten des Modells um eine bestimmte Anzahl von Tagen verzögert sind. Um Prognosen für die weitere Ausbreitung der Infektionskrankheit erstellen zu können, muss nun versucht werden in einer eigenen Modellierung die Ansteckungsrate zu beschreiben. Erhöht sich die Ansteckungsrate, so dass $\Re_{eff} > 1$, so kommt es zu einer weiteren Welle von Ansteckungen.

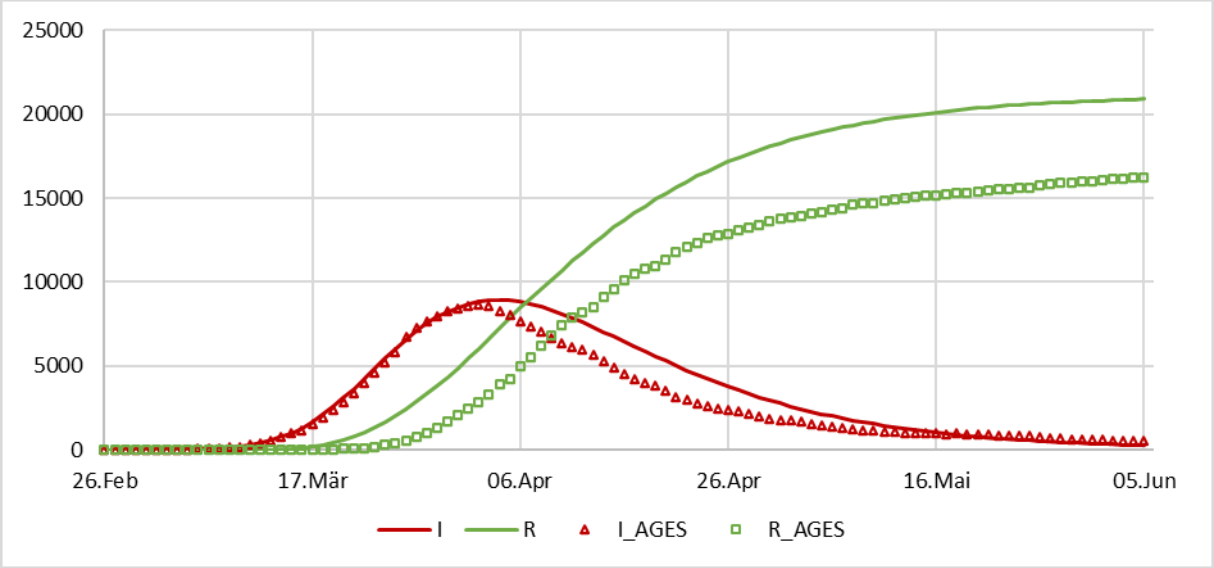



*Abbildung 2.2.2.6 Das SIR-Modell (4) bis (9) mit veränderlicher Ansteckungsrate $\tilde{a}_t$ im Vergleich zu den von der AGES veröffentlichten Daten.*

### e) Modellierung durch Senkung der Populationsgröße $N$

Das wesentliche Verhalten des SIR-Modells wird von der effektiven Reproduktionszahl

$$\Re_{eff} = \frac{a}{b} \cdot \frac{S_t}{N} = \frac{a}{b} \cdot \frac{N - I_t - R_t}{N}$$

bestimmt. Die effektive Reproduktionszahl $\Re_{eff}$ hängt also nicht nur von den Parametern $a$ und $b$ ab, sondern auch von der Größe der Bevölkerung $N$. Verkleinert man $N$ so wird auch der Term $\frac{N-I_t-R_t}{N}$ kleiner und damit auch die effektive Reproduktionszahl $\Re_{eff}$. In Abbildung 2.2.2.6 kann man sehen, dass bis am Ende der ersten Welle etwa 17000 Personen entfernt oder ansteckend waren. Durch das Ändern von $N$ auf 17000 erhält man für das SIR-Modell Kurven, die gut an die von der AGES veröffentlichten Daten passen (Abbildung 2.2.2.7).

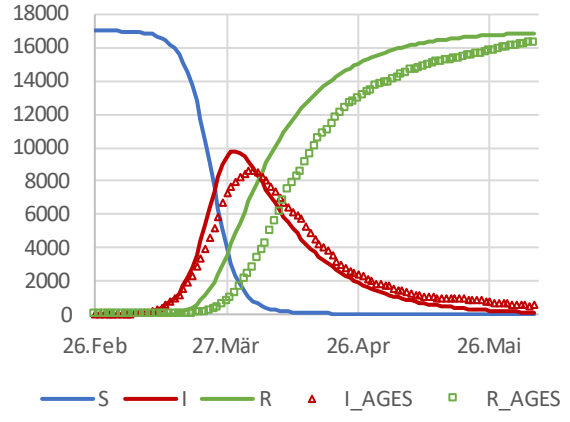



*Abbildung 2.2.2.7 SIR-Modell (4) bis (9) mit verminderter Populationsgröße* N

Es fällt wieder auf, dass die gemessenen Werte der Entfernten den Berechneten um einige Tage hinterherlaufen. Experimentiert man mit verschiedenen Werten für die Parametern $a, \tau$ und $N$ sowie für die Tage mit denen die Entfernten verzögert gemeldet wurden, so lassen sich die gemessenen Daten sehr gut durch das SIR-Modell (4) bis (9) beschreiben (Abbildung 2.2.2.8).

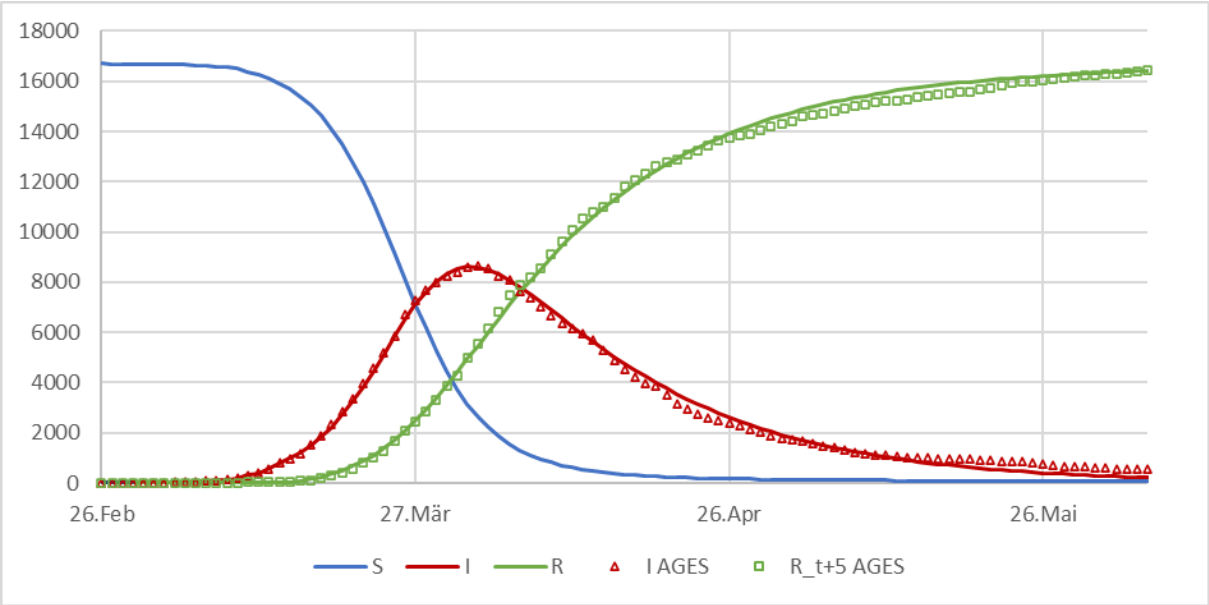



*Abbildung 2.2.2.8 SIR-Modell (4) bis (9) mit Parameterwerten $a = 0{,}32$, $b = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{16}$ und effektiver Bevölkerungsgröße $N = 16700$*

Die verwendeten Parameter sind $a = 0{,}32$, $b = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{16}$ und $N = 16700$. Da nun $N$ nicht mehr die gesamte Bevölkerung darstellt kann $N$ als effektive Bevölkerungsgröße bezeichnet werden. Diese Zahl entspricht aller Personen, die von einer Ansteckungswelle betroffen werden. Durch (sprunghaftes) Variieren der effektiven Bevölkerungsgröße $N$ können damit verschiedene Ansteckungswellen modelliert werden.

## 4. *Interpretation und Modellkritik*

Die Analyse der Differentialgleichungen (1) bis (3) und des Phasendiagramm haben gezeigt, dass die Kurven des SIR-Modells von Kermack und McKendrick (1927) im biologisch sinnvollen Bereich bleiben. Falls die Basisreproduktionszahl $\Re_0$ am Beginn größer als 1 ist, kann sich die Krankheit in der Bevölkerung ausbreiten, da sich in jedem Moment mehr Personen mit dem Virus infizieren, als gesunden bzw. am Virus sterben. Die Zahl der Ansteckenden steigt dann bis zu einem Höhepunkt an. Dieser ist erreicht, sobald der empfängliche Anteil der Bevölkerung dem Kehrwert der Basisreproduktionszahl entspricht, also:

$$\frac{S(t)}{N} = \frac{1}{\Re_0} \Leftrightarrow \Re_{eff} = 1$$

Danach fällt die Zahl der Ansteckenden wieder gegen Null. Im Vergleich zu den Modellierungsversuchen aus 2.2.1 kann in diesem Modell die Zahl der Infizierten keine negativen Werte annehmen. Daher ist das $SIR$-Modell von Kermack und McKendrick (1927) demjenigen aus den Modellierungsversuchen aus 2.2.1 vorzuziehen.

Die Implementierung des diskreten SIR-Modells (4) bis (9), das auf den Daten vor dem ersten Lockdown basiert, zeigt wie sich Sars-Cov-2 in Österreich ohne infektionspräventive Maßnahmen hätte ausbreiten können. Mitte April 2020 wäre der Höhepunkt der Epidemie in Österreich mit etwa fünf Millionen Menschen, die aktiv infiziert wären erreicht. Wenn wie zuvor angenommen nur 1,4% von ihnen intensivmedizinisch betreut werden müssten, wären das etwa 70000 Personen. Mit nur rund 1000 verfügbaren Intensivpflege-Einheiten wäre damit das Gesundheitssystem in Österreich stark überfordert. Das Modell zeigt also mit der Datenlage vom 15. März 2020 klar, dass Maßnahmen zur Eindämmung der Ausbreitung von Sars-Cov-2 getroffen werden mussten.

Durch das Maßnahmenpaket rund um den ersten Lockdown, konnte die Ausbreitung der Covid-19-Pandemie in Österreich tatsächlich verringert werden. Damit hat sich die Ansteckungsrate $a$ verringert. Es stellt sich die Frage, wie sehr die Ansteckungsrate $a$ gesenkt werden muss. Wir betrachten zwei mögliche Strategien:

a) Strategie ***„Ausrottung“*:** Senkt man die Ansteckungsrate $a$, so dass die effektive Reproduktionszahl $\mathfrak{R}_{eff}$ deutlich unter den kritischen Wert von 1 liegt, dann könnte versucht werden die Infektionskrankheit in einigen Monaten auszurotten (Abbildung 2.2.2.4 links). Dafür wären aber relativ harte Maßnahmen nötig. Zudem kann man nie sicher sein, ob nicht doch noch irgendwo nicht entdeckte Corona-Fälle oder infizierte Einreisende nach dem Zurücknehmen der Maßnahmen für einen neue Ansteckungswelle sorgen.

b) Strategie ***„Mit dem Virus leben“*:** Senkt man die Ansteckungsrate $a$, so dass die effektive Reproduktionszahl $\mathfrak{R}_{eff}$ knapp unter 1 liegt, sinkt die Anzahl der Ansteckenden Individuen in der Bevölkerung zwar nur leicht, dafür sind weniger harte Einschränkungen notwendig (Abbildung 2.2.2.4 rechts). Damit es nicht durch unvorhergesehene Ereignisse zu einem plötzlichen Anstieg an inzidenten Fällen kommen kann, sollte $\mathfrak{R}_{eff}$ nicht zu nahe an 1 liegen. Bei dieser Strategie nimmt der Anteil der Empfänglichen $\frac{S(t)}{N}$ schneller ab, sodass der Zeitpunkt, an dem $\frac{S(t)}{N} = \frac{1}{\mathfrak{R}_0}$ gilt, schneller erreicht ist. Ab diesem Zeitpunkt können alle Maßnahmen gelockert werden, da sich die Krankheit nicht mehr weiter ausbreiten kann. In diesem Fall spricht man von Herdenimmunität.

Als Beispiel für die Strategie *„Ausrottung“* kann zum Beispiel Neuseeland genannt werden, wo beim Auftreten einzelner Fälle ein lokaler Lockdown verordnet wird (dpa 2020, Mai 08). Im Gegenzug dazu kann das Vorgehen Österreichs als Beispiel für die Strategie *„mit dem Virus leben“* bezeichnet werden, da effektive Reproduktionszahl durch das Setzten und Lockern von Maßnahmen nahe an Eins gehalten wird (Abbildung 2.2.2.2).

Wurde die effektive Reproduktionszahl $\Re_{eff}$ schließlich durch infektionspräventive Maßnahmen verringert, kann die Wirksamkeit der Maßnahmen sowohl durch die Variation der Ansteckungsrate $a$ (Abbildung 2.2.2.6), als auch durch das Verändern der effektiven Populationsgröße $N$ (Abbildung 2.2.2.8) modelliert werden.

Wenn es durch Maßnahmen zu weniger Kontakten kommt, kann eine ansteckende Person weniger weitere Personen anstecken und dadurch *sinkt die Ansteckungsrate* $a$. Da die Maßnahmen nicht von einem Tag auf den anderen wirken, muss die Abnahme von der Ansteckungsrate als Funktion $a(t)$ modelliert werden. Kann man nun im Verlauf von $a(t)$ einen Trend erkennen, wie zum Beispiel in Abbildung 2.2.2.5, so kann man aufgrund dieses Trends eine Prognose für den weiteren Verlauf der Pandemie erstellen.

Einfacher scheint die Modellierung mittels *verringerter effektiver Bevölkerungsgröße* $N$. Ist bekannt, wie viele Individuen von einer Ansteckungswelle erfasst wurden, so kann man durch Experimentieren die Parameter des SIR-Modells so kalibrieren, dass das Modell sehr gut zu den Daten passt (Abbildung 2.2.2.8). Das Verringern der effektiven Bevölkerungsgröße durch Maßnahmen kann so interpretiert werden, dass durch die Maßnahmen ansteckende Personen nicht mehr mit allen anderen Personen in Kontakt stehen, sondern nur mehr zu einem Bruchteil der Bevölkerung. Dieser Modellierungsansatz findet sich auch in der Fachliteratur wieder (vgl. Ndaïrou et al, 2020, S. 4 und Cooper, Mondal & Antonopoulos, 2020, S. 2). Der Nachteil dieser Methode ist, dass das Erstellen von Prognosen schwieriger ist, falls die Veränderung der effektiven Populationsgröße als einzelner Sprung modelliert werden soll. Dafür kann damit die Wirksamkeit eines gleichzeitig eingesetzten Paketes an Maßnahmen abgeschätzt werden.

Für die gute Passung von Modell und Daten in Abbildung 2.2.2.8 wurden die von der AGES veröffentlichten Werte der Entfernten $R_t$ fünf Tage früher aufgetragen. Dies könnte sein, weil Ansteckende bereits durchschnittlich fünf Tage bevor sie durch einen negativen Covid-Test oder den Tod in die Gruppe der Entfernten übergehen, niemanden mehr anstecken, oder weil

die Meldung der Genesenen und Verstorbenen im Schnitt fünf Tage verspätet erfolgt. Dies sind jedoch nur Vermutungen. Die Verzögerung aber auch könnte auch einen Modellierungsfehler als Ursache haben.

Auch wenn das SIR-Modell so kalibriert werden kann, dass es den Verlauf der Ausbreitung von Sars-Cov-2 in Österreich während der ersten Ansteckungswelle gut beschreibt, so wurden dennoch einige Faktoren vernachlässigt. Wir sind von einer homogen durchmischten Bevölkerung ausgegangen und haben damit individuelles Verhalten nicht berücksichtigt. Außerdem wurde die räumliche Ausbreitung der Krankheit vernachlässigt. Auch eine Inkubationszeit wurde nicht beachtet. Normalerweise ist jemand, der sich bei einer Ansteckenden Person infiziert hat nämlich erst nach einer gewissen Zeit selbst ansteckend. Außerdem haben wir ignoriert, dass Ansteckende durch Testen und Kontaktrückverfolgung gefunden werden und unter Quarantäne gestellt werden können. So können sie schon vor ihrer Genesung niemanden mehr anstecken. Außerdem scheint es, dass sich das Sars-Cov-2 in der kalten Jahreszeit deutlich einfacher ausbreiten kann. Auch diesen saisonalen Effekt haben wir ignoriert. Eine weitere Limitation ist, dass Personen, die in der Statistik der AGES (2020) als neuer Fall aufscheinen, ab diesem Datum unter Quarantäne gestellt werden und eigentlich niemanden mehr anstecken können.

SIR-Modelle können um weitere Gruppen und Übergänge erweitert werden, um noch mehr Faktoren zu berücksichtigen. Murray (1993, S. 666ff.) führt zum Beispiel ein Modell an, indem die räumliche Ausbreitung der Epidemie berücksichtigt wird. Andere Modellierungen berücksichtigen die Inkubationszeit, Super-Spreader, symptomatische und asymptomatische Ansteckende durch die Einführung weiterer Gruppen (Ndaïrou et al, 2020, S. 2). Auch der Effekt von Impfungen kann leicht modelliert werden, indem man pro Zeiteinheit eine konstante Zahl an Geimpften von den Empfänglichen abzieht und den Entfernten zurechnet. Die Berücksichtigung einer Saisonalität kann einfach erreicht werden, indem man für die Ansteckungsrate $a$ bzw. für die Basisreproduktionszahl $\Re_0$ eine passende periodische Funktion findet (an der Heiden, 2020). SIR-Modelle zeichnen sich also dadurch aus, dass sie nach dem Baukastenprinzip einfach und umfangreich erweitert werden können.

## 2.3 Vergleich und Gegenüberstellung der Modelle

In den vorgegangenen Abschnitten 2.1 und 2.2 wurden Modellierungen der Ausbreitung einer Infektionskrankheit am Beispiel der Covid-19 Pandemie sehr ausführlich beschrieben. Da alle Modellierungen auf vereinfachenden Annahmen basieren, gilt *„alle Modelle sind falsch – manche sind nützlich“* (Box 1979). Dies gilt auch für die zuvor besprochenen Modelle. Durch eine vergleichende Gegenüberstellung der Modelle aus 2.1 und 2.2 kann bestimmt werden, für welche Zwecke diese Modelle geeignet sind und für welche nicht. Pauschal muss aber an dieser Stelle nochmals darauf hingewiesen werden, dass die Modelle nur als Beispiele für einen mehrstufigen Modellierungsprozess dienen und nicht zur Prognose des weiteren Verlaufs der Covid-19-Pandemie oder zur Evaluierung von infektionspräventiven Maßnahmen werden sollten.

Das Modell des exponentiellen Wachstums kommt in vielfältigen Situationen vor. Auch die Ausbreitung von Sars-Cov-2 kann damit modelliert werden. Unter der Annahme, dass die effektive Reproduktionszahl $R_{eff}$ für einen gewisse Zeitspanne konstant ist, eignet sich das Model sogar, um kurzfristige Prognosen zum weiteren Verlauf der Pandemie zu erstellen (Abbildung 2.1.2.2). Mit dem Modell des exponentiellen Wachstums (bzw. der exponentiellen Abnahme) kann aber keine Ansteckungswelle, wie in 2.1.3 oder in 2.2.2 modelliert werden. Je nach geschätzter Reproduktionszahl würden die neuen Fälle pro Tag immer weiter anwachsen oder abfallen. Das Modell des logistischen Wachstums aus 2.1.3 und das SIR-Modell aus 2.2.2 bauen auf dem Modell des exponentiellen Wachstums auf. In beiden Modellen steigen die Infektionszahlen zunächst exponentiell an, bevor sie schließlich abflachen.

Das Modell des logistischen Wachstums berücksichtigt, dass die Anzahl der Infizierten nicht unbegrenzt anwachsen kann. Die Zahl der zu einem Zeitpunkt Erkrankten steigt bis zu einem Höhepunkt an und fällt dann wieder gegen null (Abbildung 2.1.3.1). Es wird jedoch außer Acht gelassen, dass bereits Genesene oder Verstorbene das Virus nicht mehr weitergeben können. Dadurch kommt es zu mehreren Problemen. Auch durch ein extremes Herabsenken der Ansteckungsrate $a$ kann das Sars-Cov-2 Virus nicht ausgerottet werden und die gesamte Bevölkerung wird durchseucht. In den Medien wurde das logistische Modell verwendet, um das Abflachen der Kurve zu erklären. Die Modellierung in 2.1.3 ergab, dass die Ansteckungsrate durch infektionspräventive Maßnahmen für sehr lange Zeit sehr stark gesenkt werden muss, damit es zu keiner Überlastung des Gesundheitssystems kommt. Das

Modell des logistischen Wachstums eignet sich also zwar für qualitative Aussagen zur Ausbreitung der Infektionskrankheit, jedoch nicht für quantitative.

Das SIR-Modell aus 2.2.2 beschreibt die grundsätzliche Dynamik der Ausbreitung von Sars-Cov-2 relativ gut. Aus der Basisreproduktionszahl $\Re_0$ und der effektiven Reproduktionszahl $\Re_{eff}$ können bereits einige Aussagen über den weiteren Verlauf und den Höhepunkt der Pandemie und das Eintreten der Herdenimmunität gemacht werden. Die Auswirkung von Maßnahmen lassen sich durch Veränderung der Ansteckungsrate $a$ oder der effektiven Populationsgröße $N$ modellieren. Auf diese Art kann auch das Auftreten weiterer Ansteckungswellen modelliert werden. Damit ist das SIR-Modell aus 2.2.2 von den in diesem Abschnitt behandelten Modellen sicherlich das vielseitigste, auch wenn einige wesentliche Faktoren, wie etwa das individuelle Verhalten oder die Inkubationszeit vernachlässigt werden.

# 3. Fazit

Ziel dieser Masterarbeit war es zu beschreiben, was Modellbilden im Mathematikunterricht bedeutet, und dies anhand der Modellierung der Ausbreitung einer Infektionskrankheit exemplarisch auszuführen.

Dazu wurden zunächst die prototypischen Konzepte zum mathematischen Modellbilden von Blum, Weigand und Weller, Engel und Förster dargestellt und miteinander verglichen (1.1). In diesen Konzepten wurde das mathematische Modellieren als zweifacher und zyklischer Übersetzungsprozess zwischen dem Bereich der Mathematik und dem Rest der Welt verstanden. Bei allen untersuchten Konzepten zum Modellbilden konnten folgende fünf Schritte herausgearbeitet werden.

1. *Konstruieren*: Von einer konkreten Situation ausgehend wird zunächst ein Realmodell konstruiert. Dabei geht es darum, die zu modellierenden wesentlichen Einflussfaktoren und Zusammenhänge herauszuarbeiten.
2. *Mathematisieren*: Die wesentlichen Zusammenhänge werden als Formeln, Funktionen oder andere Mathematische Ausdrücke formuliert und so ein mathematisches Modell erstellt.
3. *Experimentieren/Operieren/Darstellen:* Mit verschiedenen Methoden wird darauf hin eine Lösung für das mathematische Modell gesucht.
4. *Interpretieren*: Hier wird nach der Bedeutung und der Gültigkeit der mathematischen Resultate für die Ausgangssituation gefragt und die Entscheidung getroffen, ob die Ergebnisse ausreichend gut sind oder ob das Modell verbessert oder gänzlich verworfen werden muss.
5. *Darstellen:* Wenn zufriedenstellende Ergebnisse erreicht werden konnten, werden diese noch dargestellt.

Im zweiten Teil dieser Arbeit wurde dieser Modellbildungskreislauf aus (1.1) beim Modellieren der Ausbreitung des Coronavirus Sars-Cov-2 in Österreich mehrmals durchlaufen (2.1 und 2.2) und schließlich die dabei entstanden Modelle verglichen (2.3). Der letzte Schritt des Darstellens wurde nicht explizit ausgeführt. Er besteht implizit in der detaillierten Beschreibung aller Modellierungsschritte.

Zunächst wurde das Modell des exponentiellen Wachstums gewählt, da – zumindest am Beginn der Pandemie-die Zahl der Infizierten Personen proportional zu sich selbst wächst (2.1.1 und 2.1.2). Dieses Modell wurde dann durch die Annahme, dass die Bevölkerungszahl eine natürliche Obergrenze für das Wachstum darstellt, zum Modell des logistischen Wachstums erweitert (2.1.3). Da auch dieses Modell noch nicht zufriedenstellend war, wurde in (2.2) ein SIR-Modell für die Ausbreitung von Sars-Cov-2 in Österreich erstellt, welches neben den ansteckenden Personen nicht nur den Anteil, der noch für das Virus Empfänglichen berücksichtigt, sondern auch diejenigen, die bereits genesen oder verstorben sind. Im ersten Anlauf der Modellierung in 2.2.1 wurden zunächst mehrere Mathematisierungsfehler gemacht und aufgedeckt, jedoch führte auch das richtig mathematisierte Modell zu mangelhaften Ergebnissen. Die Verwerfung der Modellierung mit retardierten Gleichungen und neue Annahmen führten in 2.2.2 zu einem brauchbaren Modell.

In 1.2 wurden mathematische Modelle nach ihrer Zielvorstellung in *deskriptive* und *normative* unterschieden. *Deskriptive Modelle* sind solche, die eine Situation beschreiben, während *normative Modelle* durch Vorschriften oder Regeln auf die Realität einwirken. Zunächst ist das in 2.2.2 erstellte SIR-Modell ein deskriptives Modell, dass die Ausbreitung von Sars-Cov-2 beschreibt. Durch die Beachtung der effektiven Reproduktionszahl, die durch infektionspräventive Maßnahmen – das heißt Vorschriften und Regeln - unter 1 gesenkt werden soll, wird das SIR-Modell Teil eines normativen Modells.

Daraufhin wurden 1.3 die *Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Modelle* aufgezeigt. Im zweiten Kapitel wurden die mathematischen Modelle eingesetzt, um Prognosen über den weiteren Verlauf der Pandemie sowie Aussagen über die Wirksamkeit von eingeführten infektionspräventiven Maßnahmen getätigt. Es wurde gezeigt wie das jeweilige Modell als Entscheidungsgrundlage dienen kann. Gleichzeitig wurden aber auch die Grenzen der jeweiligen Modellierungen aufgezeigt.

Schließlich konnte in 1.4 dargestellt werden, wie digitale Werkzeuge den Modellbildungsprozess in jedem Schritt unterstützen können. Im zweiten Kapitel wurden verschiedene CAS beim *Experimentieren* mit den Modellen und als *Rechenwerkzeug* verwendet. Diese waren auch bei der *Darstellung* und *Visualisierung* der Ergebnisse hilfreich. Außerdem wurde der Computer mit Internetanbindung zur *Recherche* beim Konstruieren der Modelle eingesetzt. Weiters wurde zu jedem Modell ein Szenario ohne Ergreifung

infektionspräventiver Maßnahmen *simuliert.* In 2.2.1 half die graphische Darstellung des Modells beim Kontrollieren der mathematischen Resultate, wodurch sich herausstellte, dass das die Resultate zu verwerfen sind.

In 1.5. wurde dargestellt, dass in der fachdidaktischen Diskussion derzeit folgende fünf Argumente nach Blum und Niss (1991) für das Modellbilden im Mathematikunterricht genannt werden.

Modellbilden soll im Mathematikunterricht gelehrt werden, weil

1) …Modellierungskompetenzen in anderen Fächern und außermathematischen Anwendungen benötigt werden *(utilitaristisches Argument).*
2) …Schülerinnen und Schüler durch das kritische Hinterfragen und Bewerten mathematischer Modelle zu mündigen Bürgern und qualifizierten Arbeitskräften werden *(pragmatisches Argument).*
3) … dabei wertvolle Metakompetenzen wie das forschende und kreative Denken, das Problemlösen und das Argumentieren gefördert wird *(formale Argumente).*
4) …Modellbilden zum kulturellen Gesamtphänomen der Mathematik gehört *(kulturbezogene Argumente).*
5) … geeignete Problemstellungen es ermöglichen, dass Lernende die Mathematik als nützliches Instrument erleben und sich so deren Motivation steigert und deren Einstellung gegenüber dem Fach verbessert wird. *(lernpsychologische Argumente)*

Modellbildungskompetenzen können entweder *holistisch*, also im Durchführen ganzer Modellbildungsprozesse oder *atomistisch*, also durch Trainieren einzelner Schritte erworben werden. Da im zweiten Kapitel der gesamte Modellierungsprozess sehr ausführlich geschildert ist, kann diese Darstellung als Ausgangspunkt für ein umfassendes Unterrichtsprojekt nach dem holistischen Ansatz verwendet werden. Einzelne Teile der Modellierung, wie die Wahl unterschiedlicher Strategien beim Setzen von Maßnahmen können aber auch für einzelne Unterrichtseinheiten im Sinne des atomistischen Ansatzes verwendet werden, um etwa das Interpretieren zu trainieren.

In der Literatur werden vor allem drei Herausforderungen zum Unterrichten mit Modellierungsaufgaben genannt. *Erstens* benötigt die Bearbeitung anwendungsorientierter Problemstellungen viel Zeit. *Zweitens* ist es oft schwierig, passende realitätsbezogene Aufgaben zu finden, für deren Lösung nicht zu viel außermathematisches Fachwissen benötigt

wird. *Drittens* stellen die Überprüfung und die Beurteilung der offenen Modellierungsaufgaben einen größeren Aufwand als herkömmliche Aufgaben dar.

Modellbilden ist eine von vier Handlungsdimensionen in den Kompetenzmodellen der österreichischen Lehrpläne für die Sekundarstufe I. und II.. Die weiteren Handlungskompetenzen, also das Rechnen und Operieren (H2), das Interpretieren (H3) sowie das Argumentieren und Begründen (H4) werden beim Durchlaufen des Modellbildungskreislauf ebenfalls gefördert. Damit ist das Modellieren ein zentrales Organisationsprinzip der österreichischen Lehrpläne für Mathematik.

Die Resultate der Literaturarbeit zum Modellbilden im Mathematikunterricht konnten im zweiten Kapitel - wie oben dargestellt - durch eine exemplarische Modellbildung zur Ausbreitung von Infektionskrankheiten größtenteils dargestellt werden. In der Darstellung des Modellierungsbeispiels wurde jedoch kein expliziter Unterrichtsvorschlag basierend auf den Ausführungen zum Modellbilden im kompetenzorientierten Unterricht aus 1.5 gegeben. Die Aufbereitung in Kapitel 2 ist jedoch so detailliert, dass eine Umsetzung im anwendungsorientierten Mathematikunterricht unmittelbar möglich ist.

Eine weiterführende Arbeit könnte sich daher mit der Frage beschäftigen, in welcher Form die Modellierung der Ausbreitung einer Infektionskrankheit in den verschiedenen Schulstufen oder Schultypen umgesetzt werden kann und wie eine konkrete Unterrichtsplanung dazu aussehen kann.

In dieser Masterarbeit konnte also die Theorie zum Modellbilden im Mathematikunterricht dargestellt und anhand der exemplarischen Modellierungen zur Ausbreitung von Infektionskrankheiten beschrieben werden.

# Literaturverzeichnis


Ableitinger, C. (2010). Biomathematische Modelle im Unterricht. Fachwissenschaftliche und didaktische Grundlagen mit Unterrichtsmaterialien. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

AGES, TU Graz (2020). CSV Download von AGES Dashboard COVID19. Abgerufen 24.03.2021, von https://covid19-dashboard.ages.at/data/data.zip

AGES, TU Graz (2021). Schätzer der effektiven Reproduktionszahl (R_eff) und 95% Konfidenzintervall (R_eff_lwr und R_eff_upr). Abgerufen 27.04.2021, von https://www.ages.at/fileadmin/AGES2015/Wissen-Aktuell/COVID19/R_eff.csv

Blum, W. (1985). Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion. *Mathematische Semesterberichte, 32*(2), 195-232.

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – state, trends and issues in mathematics instruction. *Educational studies in mathematics, 32,* 37-68.

Blum, W., & Leiß, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der „Tanken" Aufgabe. *Mathematik lehren, 128*, 18-21.

Bock, W., & Bracke, M. (2018). Modellierung und Simulation von Krankheitsausbreitungen. In G. Greefrath & H.-S. Siller (Hrsg.), *Digitale Werkzeuge, Simulationen und mathematisches Modellieren. Didaktische Hintergründe und Erfahrungen aus der Praxis* (S. 121-136). Wiesbaden: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-21940-6_6

Box, G. E. P. (1979). Robustness in the Strategy of Scientific Model Building. In R. L. Launer, G. N. Wilkinson (Hrsg.), *Robustness in Statistics,* (S. 201-236). Academic Press. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-438150-6.50018-2

Brand, S. (2014). Erwerb von Modellierungskompetenzen. Ein empirischer Vergleich eines holistischen versus eines atomistischen Modellierungsansatzes zur Förderung von Modellierungskompetenzen. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Büchter, A., & Henn, H.-W. (2015). Schulmathematik und Realität – Verstehen durch Anwenden. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, H.-G. Weigand (Hrsg)., *Digitale Werkzeuge, Simulationen und mathematisches Modellieren. Didaktische Hintergründe und Erfahrungen aus der Praxis* (S. 19-49). Berlin: Springer.

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung (2021). Die Kompetenzkataloge. Abgerufen, am 04.06.2021 von https://www.matura.gv.at/index.php?eID=dumpFile&t=f&f=2665&token=8b62ffc7555c9f607440a49f19797abb436f9db0

Chang, S., Pierson E., Koh, P. W., Gerardin, J., Redbird, B., Grusky, D., … Leskovec, J. (2020). Mobility network Models of COVID-19 explain inequities and inform reopening. *Nature 589*, 82-87. https://doi.org/10.1038/s41586-020-2923-3

Cooper, I., Mondal, A., & Antonopoulos, C. G. (2020). A SIR model assumption for the spread of Covid-19 in different communities. *Chaos, Solitons and Fractals 139,* 1-14. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110057

dpa.(2021, Mai 08). Corona-Superstar Neuseeland: Streifzug durch ein fast normales Land. Abgerufen 30.05.2021, von https://www.sn.at/politik/weltpolitik/corona-superstar-neuseeland-streifzug-durch-ein-fast-normales-land-103480093

Elschenbroich, H.-J. (2020). Mathematik und Corona-Infektionen. *MNU Journal 73* (3), 193-198.

Endt, Ch., Mainka, M., & Müller-Hansen, S. (2020, März 10) Coronavirus. Die Wucht der großen Zahl. Abgerufen 16.03.2021, von https://projekte.sueddeutsche.de/artikel/wissen/coronavirus-die-wucht-der-grossen-zahl-e575082/

Engel, J. (1998). Zur stochastischen Modellierung funktionaler Abhängigkeiten: Konzepte, Postulate, Fundamentale Ideen. *Mathematische Semesterberichte 45*(1), 95-112.

Förster, F. (2000). Anwenden, Mathematisieren, Modellbilden. In U.-P. Tietze, M. Klika, H. Wolpers (Hrsg.), *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Band 1, Fachdidaktische Grundfragen – Didaktik der Analysis* (S. 121-159). (2., durchges. Aufl.. ed.) Braunschweig: Vieweg.

Fuchs, K. J., & Blum, W. (2008). Selbstständiges Lernen im Mathematikunterricht. In J. Thonhauser (Hrsg.), *Aufgaben als Katalysatoren von Lernprozessen. Eine zentrale Komponente organisierten Lehrens und Lernens aus der Sicht von Lernforschung, Allgemeiner Didaktik und Fachdidaktik* (S. 135-148). Münster: Waxmann.

Fuchs, K-J., & Kraler, Ch. (2020). Bildungsstandards und Aufgabenkultur im Mathematikunterricht. in *Bildungsstandards: Kompetenzorientierung, Aufgabenkultur und Qualitätsentwicklung im Schulsystem* ( S. 482-497). Münster: Waxmann.

Fuchs, K. J., & Plangg, S. (2018). Computer Algebra Systeme in der Lehrer(innen)bildung. Münster: Waxmann.

Freudenthal, H. (1973). Mathematik als pädagogische Aufgabe. Stuttgart: Klett.

Greefrath G. (2011). Using Technologies: New Possibilities of Teaching and Learning Modelling – Overview. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, G. Stillman (Eds.) *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling,* vol 1., (S. 301-304). Dordrecht: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_30

Greefrath G. & Siller, H.-S. (2018). Digitale Werkzeuge, Simulationen und mathematisches Modellieren. In G. Greefrath & H.-S. Siller (Hrsg.), *Digitale Werkzeuge, Simulationen und mathematisches Modellieren. Didaktische Hintergründe und Erfahrungen aus der Praxis* (S. 3-22). Münster: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-21940-6_1

an der Heiden, M., & Buchholz, U. (2020). Modellierung von Beispielszenarien der Sars-CoV-2-Epidemie 2020 in Deutschland. https://doi.org/10.25646/6571.2

Heitwerth, J. (2020). #FlattenTheCurve – Mathematik als Lebensretter und Fake-News Prävention. *MNU Journal 73* (3), 198-204.

Hethcote, H. W. (1980). Three Basic Epidemiological Models. In S. A. Levin, T. G. Hallam, L. J. Gross (Hrsg.), *Applied Mathematical Ecology,* (S. 119-144). Berlin Heidelberg: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-61317-3

Kaiser, G., Blum, W., Borromeo Ferri, R., Greefrath, G. (2015). Anwendungen und Modellieren. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 357-383). Berlin: Springer https://doi.org/ 10.1007/978-3-642-35119-8_13

Kermack, W., & McKendrick, A. (1927). A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, 115*(772), 700-721. Abgerufen 26. April 2021, von http://www.jstor.org/stable/94815

Maaß, K. (2005). Modellierungen – Aufgaben für alle Lernenden? *Mathematik lehren, 131*, 19-22.

Murray, J.D. (1993). *Mathematical Biology*, (2. durchges. Aufl..), Berlin Heidelberg: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-08542-4

Ndaïrou, F., Area, I., Nieto, J. J., & Torres, D. F.M. (2020). Mathematical modeling of COVID-19 transmission dynamics with a case study of Wuhan. *Chaos, Solitons and Fractals, 135*, 1-16. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.109846

Neuwirth, E. (2021). COVID-10-Zahlen und exponentielle Verläufe. Abgerufen 08. April 2021, von https://just-the-covid-facts.neuwirth.priv.at/2021/04/07/covid-19-zahlen-und-exponentielle-verlaeufe/

Peirlinck, M., Linka, K., Sahli Costabal, F., Bhattacharya, J., Bendavid, E., Ioannidis, J.P.A., & Kuhl, E. (2020). Visualizing the invisible: The effect of asymptomatic transmission on the outbreak dynamics of COVID-19. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 372*, 1-22, https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113410

Richter, L., Schmid, D., & Stadlober, E. (2020). Methodenbeschreibung für die Schätzung von epidemiologischen Parametern des COVID19 Ausbruchs, Österreich. AGES-Österreichische Agentur für Gesundheit und Ernährungssicherheit. Abgerufen 27. April 2021, von https://www.ages.at/en/wissen-aktuell/publikationen/epidemiologische-parameter-des-covid19-ausbruchs-oesterreich-2020/

RIS (2021a). Gesamte Rechtsvorschrift für Lehrpläne – allgemeinbildende höhere Schulen, Fassung vom 03.06.2021. Abgerufen, am 3. Juni 2021, von https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568

RIS (2021b). Gesamte Rechtsvorschrift für Bildungsstandards im Schulwesen, Fassung vom 04.06.2021. Abgerufen, am 4. Juni 2021, von https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=20006166

RKI (2020a). Erläuterung der Schätzung der zeitlich variierenden Reproduktionszahl R. Abgerufen 27. April 2021, von https://www.rki.de/DE/Content/InfAZ/N/Neuartiges_Coronavirus/Projekte_RKI/R-Wert-Erlaeuterung.pdf?__blob=publicationFile

RKI (2021). Epidemiologischer Steckbrief zu SARS-CoV-2 und Covid-19. Abgerufen 29. März 2021, von https://www.rki.de/DE/Content/InfAZ/N/Neuartiges_Coronavirus/Steckbrief.html;jsessionid=388DA534B7585AD0CB029B512AA4C712.internet061?nn=13490888#doc13776792bodyText12

Sarkar, K., Khajanchi, S., & Nieto, J. J. (2020). Modeling and forecasting the COVID-19 pandemic in India. *Chaos, Solitons and Fractals, 139*, 1-16. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110049

Scheiner, S., Ukaj, N., & Hellmich, Ch. (2020). Mathematical modeling of COVID-19 fatality trends: Death law versus infection-to-death delay rule. *Chaos, Solitons and Fractals, 136,* 1-8. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.109891

Schmidt, G. (1992). Mathematik als Entscheidungsgrundlage. MU 38 (4), 5-22.

Sill, T. (2020, März 12). Exponentielles Wachstum. Wettlauf gegen die Zeit bei Coronavirus. Abgerufen 16. März 2021, von https://orf.at/stories/3157408/

Siller, H.-St. (2006). *Modellbilden – eine zentrale Leitidee der Mathematik.* Dissertation an der Paris-Lodron Universität Salzburg.

Siller, H.-St., & Fuchs, K. J. (2009). Darstellen, Modellbilden. *Mathematik im Unterricht, 3,* 66-84. https://doi.org/10.25598/miu/2009-3-5

Siller, H.-St., & Greefrath, G. (2009). Mathematical modelling in class regarding to technology. *Proceedings of CERME 6,* 2136-2145.

Simha, A., Venkatesha Prasad, R., Narayana, S. (2020). A simple Stochastic SIR model for COVID-19 Infection Dynamics for Karnataka after interventions – Learning from European Trends. Abgerufen von 26. April 2021, von https://arxiv.org/pdf/2003.11920.pdf

t-online. (2020, März 10). Ausbreitung und Maßnahmen: Minister Spahn und Experten über Coronavirus in Deutschland. Abgerufen 16. März 2021, von https://www.t-online.de/tv/news/panorama/id_87491846/minister-spahn-und-experten-ueber-coronavirus-in-deutschland.html

Wang, J., Xiong, J., Yang, K., Peng, S., & Xu, Q. (2010). Use of GIS and agent-based modeling to simulate the spread of influenza. In: *18th International Conference on Geoinformatics*, 2010, pp. 1-6, https://doi.org/10.1109/GEOINFORMATICS.2010.5567658

Weigand, H.-G., & Weller, H. (1997). Das Lösen realitätsorientierter Aufgaben zu periodischen Vorgängen mit Computeralgebra. *ZDM, 5,* 162-169.

# Anhang

## Lemma 1

Sei $I: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad t \to \frac{N}{1+\left(\frac{N}{I_0}-1\right)e^{-at}}$ wobei $a > 0$ und $N > I_0 > 0$. $t_w := \frac{\ln\left(\frac{N}{I_0}-1\right)}{a}$

Weiters sei $A: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad t \to I(t) - I(t-\tau)$

Und $\tilde{A}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad a \to \frac{N}{1+\left(\frac{N}{I_0}-1\right)e^{-a \cdot t_w}} - \frac{N}{1+\left(\frac{N}{I_0}-1\right)e^{-a(t_w-\tau)}}$

i) $A(t)$ bei hat ein genau ein lokales Maximum bei:

$$t_w + \frac{\tau}{2}$$

ii) $\tilde{A}$ ist streng monoton steigend.

**Beweis:**

i) Sei $C := \left(\frac{N}{I_0} - 1\right)$. Da $I'(t) = \frac{aN\left(\frac{N}{I_0}-1\right)e^{-at}}{\left(1+\left(\frac{N}{I_0}-1\right)e^{-at}\right)^2}$ gilt wegen der Summenregel

$$A'(t) = aN\left(\frac{Ce^{-at}}{(1+Ce^{-at})^2} - \frac{Ce^{-at}e^{\tau a}}{(1+Ce^{-at}e^{\tau a})^2}\right)$$

Wir setzen $A'(t) = 0$ um Kandidaten für lokale Extremstellen zu finden.

$$A'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{Ce^{-at}}{(1+Ce^{-at})^2} = \frac{Ce^{-at}e^{\tau a}}{(1+Ce^{-at}e^{\tau a})^2}$$

Durch die Substitution von $t = t_w + x$ erhalten wir wegen $e^{-at_w} = C^{-1}$:

$$\frac{e^{-ax}}{(1+e^{-ax})^2} = \frac{e^{-ax}e^{\tau a}}{(1+e^{-ax}e^{\tau a})^2}$$

$$\underset{Ce^{-ax} \neq 0}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{(1+e^{-ax})^2} = \frac{e^{\tau a}}{(1+e^{-ax}e^{\tau a})^2}$$

$$\Leftrightarrow (1+e^{-ax}e^{\tau a})^2 = e^{\tau a}(1+e^{-ax})^2$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2e^{-ax}e^{\tau a} + e^{(-2ax)}e^{2\tau a} = e^{\tau a}(1 + 2e^{-ax} + e^{-2ax})$$

$$\underset{e^{\tau a} \neq 0}{\Longleftrightarrow} e^{-\tau a} + 2e^{-ax} + e^{(-2ax+\tau a)} = 1 + 2e^{-ax} + e^{-2ax}$$

$$\Leftrightarrow e^{-\tau a} + e^{(-2ax+\tau a)} = 1 + e^{-2ax}$$

$$\Leftrightarrow e^{-\tau a} - 1 = e^{-2ax} - e^{(-2ax+\tau a)}$$

$$\Leftrightarrow e^{-\tau a}(1 - e^{\tau a}) = e^{-2ax}(1 - e^{\tau a})$$

$$\underset{e^{14a} \neq 1}{\Longleftrightarrow} e^{-\tau a} = e^{-2ax} \Leftrightarrow x = \frac{\tau}{2}$$

Durch Rücksubstitution von $x = t - t_w$ folgt, dass $A'\left(\frac{\ln\left(\frac{N}{I_0}-1\right)}{a} + \frac{\tau}{2}\right) = 0$.

Zusätzlich gelten

$$A'(t_w) = I'(t_w) - I'(t_w - \tau) > 0$$

$$A'(t_w + \tau) = I'(t_w + \tau) - I'(t_w) < 0$$

Weil $I'(t_w) > I'(t_w - \tau)$ und $I'(t_w) > I'(t_w + \tau)$ in $I'(t)$ in $t_w$ ein Maximum besitzt.

Da $A'(t)$ nur eine Nullstelle in $\mathbb{R}$ besitzt und $A$ in $t_w$ steigt und in $t_w + \tau$ fällt, hat $A$ an der stelle $t_w + \frac{\tau}{2} = \tau$ ein lokales Maximum.

ii) Gilt da, $\tilde{A}' > 0 \; \forall a \in \mathbb{R}$

□

## Lemma 2

Sei $I: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad t \to \frac{N}{1+\left(\frac{N}{I_0}-1\right)e^{-at}}$ wobei $a$ >0 und $N = 8.900.000 > I_0 > 0$

und $t_m \coloneqq \frac{\ln\left(\frac{N}{I_0}-1\right)}{a} + \frac{\tau}{2}$.

Weiters sei $A: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad t \to I(t) - I(t-\tau)$

Dann löst

$$a = \frac{2}{\tau}\ln\left(\frac{1 + \frac{1000}{0.014 \cdot N}}{1 - \frac{1000}{0.014 \cdot N}}\right) \approx 0.00214$$

annähernd die Gleichung $0.014 \cdot A(t_m) = 1000$

**Beweis:**

Wir substituieren zunächst $C = \left(\frac{N}{I_0} - 1\right)$

$$0.014 \cdot A(t_m) = 1000 \Leftrightarrow \frac{1}{1 + Ce^{-a\tau}} - \frac{1}{1 + Ce^{-a(\tau-14)}} = \frac{1000}{0.014 \cdot N}$$

Wir beobachten $e^{-a\tau} = e^{-\frac{aln(C)}{a} - \frac{\tau}{2}a} = C^{-1} \cdot e^{-\frac{\tau}{2}a}$ und analog $e^{-a(t_m-\tau)} = C^{-1}e^{\frac{\tau}{2}a}$

Mit der Substitution $x = e^{\frac{\tau}{2}a}$ und $K = \frac{1000}{0.014 \cdot N}$ erhalten wir folgende Gleichung

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} - \frac{1}{1 + x} = K$$

$$\Leftrightarrow (1 + x) - \left(1 + \frac{1}{x}\right) = K(1 + x)\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = \left(K + Kx + \frac{K}{x} + K\right)$$

$$\Leftrightarrow (1 - K)x^2 + (-2K)x - (1 + K) = 0$$

Diese quadratische Gleichung wird für $K \neq 1$ von $x_1 = -1$ und $x_2 = \frac{1+K}{1-K}$ gelöst.

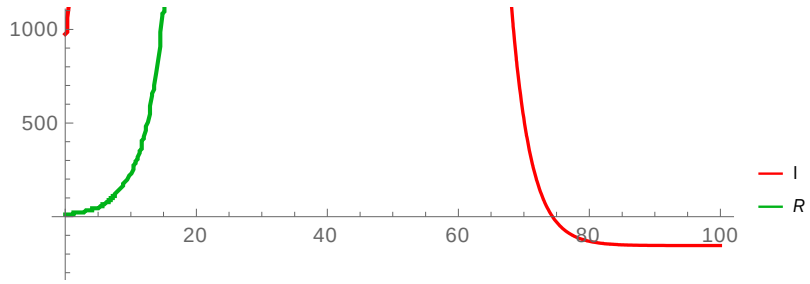
Wegen $x_1 < 0$ erhält man von $x_1$ keine reelle Lösung für $a$.. und löst man $x_2 = e^{\frac{\tau}{2}a}$ nach $a$ auf erhält man:

$$a = \frac{2}{\tau} \ln\left(\frac{1 + \frac{1000}{0.014 \cdot N}}{1 - \frac{1000}{0.014 \cdot N}}\right) \approx 0.00214$$ □

## Implementierung des verzögerten SIR-Modells (6) in Mathematica

```
Ianf=ListInterpolation[{1,3,7,8,12,17,23,37,44,73,96,124,146,199,306,400,582,789,98
2}]
Ranf=ListInterpolation[{0,0,0,0,0,0,0,0,2,2,2,2,2,4,6,10,10,13,18}]
a=0.34
tau=15
n=8901064
sol=NDSolve[
  {S'[t]==-a*Inf[t]*S[t]/n,
   Inf'[t]==a*Inf[t]*S[t]/n-a*Inf[t-tau]*S[t-tau]/n,
   R'[t]==a*Inf[t-tau]*S[t-tau]/n,

   S[t/;t<= 0]==n-Ianf[t+19]-Ranf[t+19],
   Inf[t/;t<=0]==Ianf[t+19],
   R[t/;t<= 0]==Ranf[t+19]},
  {S,Inf,R},{t,3000}]
Show[
 Plot[{Evaluate[S[t]/.sol],
   Evaluate[Inf[t]/.sol],Evaluate[R[t]/.sol]},{t,0,100},
  PlotStyle->{Blue,Red,RGBColor[0,0.7`,0.1`]},
  PlotLegends->{S,"I",R}],
 PlotRange->{-1000,1000}]
Evaluate[Inf[80]/.sol]
```



## Eidesstattliche Erklärung

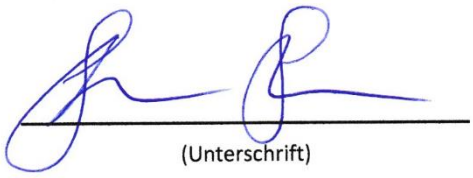
Hiermit versichere ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Masterarbeit ohne fremde Hilfe und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt und die den benutzten Quellen wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Diese Arbeit wurde in gleicher oder ähnlicher Form noch bei keiner anderen Prüferin/ keinem anderen Prüfer als Prüfungsleistung eingereicht.

Mir ist bekannt, dass Zuwiderhandeln mit der Note „nicht genügend“ (ohne Möglichkeit einer Nachbesserung oder Wiederholung) geahndet wird und weitere rechtliche Schritte nach sich ziehen kann.

Diese Arbeit wurde neben den gedruckten Versionen auch als pdf-Dokument in die PLUS Abschlussarbeitenverwaltung (PAAV) zur Prüfung der o.g. Erklärung bei der zuständigen Prüferin/dem zuständigen Prüfer hinterlegt.

Salzburg, am 09. Juni 2021
(Ort und Datum)


(Unterschrift)